

Indice

<i>Alettatura piana rettangolare</i>	1
<i>Determinazione dell'efficienza dell'aletta</i>	2
<i>Andamento della temperatura nell'aletta</i>	3
<i>Calcolo potenza scambiata ed efficienza aletta</i>	5
<i>Calcolo efficienza alettatura</i>	6
<i>Esercizio</i>	6
<i>Allegati</i>	10

Superfici alettate

Alettatura piana rettangolare

L'introduzione di una superficie alettata è subordinata dalla necessità di incrementare la superficie di scambio termico a fronte di un ridotto aumento di ingombro massimizzando l'efficienza di un componente che deve scambiare calore.

Esistono numerosi e diversi esempi applicativi di corpi alettati, quali ad esempio cilindri di motori a combustione interna, scambiatori di calore a tubi alettati, componentistica hardware ecc...

Le alette, che possono presentare forme assai diverse per forma, ingombri, disposizione, sono generalmente realizzate di pezzo con il corpo cui sono accoppiate al fine di non introdurre ulteriori resistenze termiche di contatto R_t che provocherebbero una differenza di temperatura tra superficie piana e superficie alettata (ricordando appunto che $R_t = \frac{\Delta T}{Q}$); in ogni caso, le

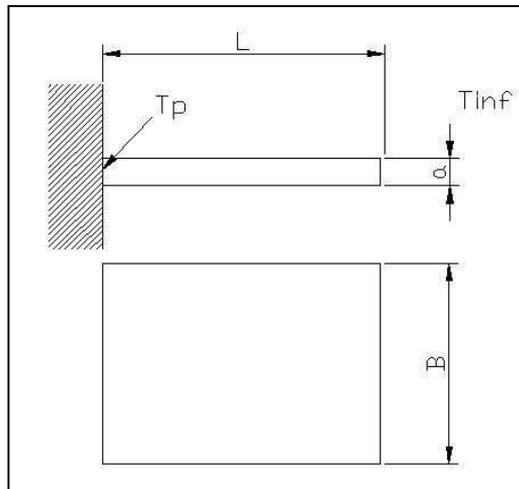
alette possono essere accoppiate anche ricorrendo a saldatura, fissaggio con viti e dadi, brasatura, accoppiamento forzato a caldo, pena l'insorgenza di una resistenza termica di valore non trascurabile a causa dell'inevitabile contatto imperfetto esistente tra i due corpi assemblati che potrebbe addirittura pregiudicare il corretto funzionamento dell'aletta stessa; in tal caso è possibile adottare opportuni accorgimenti per limitare tale fenomeno, ovvero si può ricorrere all'introduzione di particolari paste che hanno lo scopo di assicurare, per quanto possibile, la continuità fisica tra i due pezzi: a causa degli elevati costi, tale soluzione è però applicabile quasi esclusivamente a componenti hardware di ridotte dimensioni.

In questa trattazione si procede con l'analisi dell'aletta piana rettangolare in quanto è l'unica geometria per la quale può essere impostata una trattazione analitica senza troppe difficoltà; come spesso accade in questa disciplina, per geometrie complesse si preferisce ricorrere a prove sperimentali ricavando formulazioni empiriche.

Determinazione dell'efficienza dell'aletta

Come enunciato, per incrementare la potenza termica scambiata, è opportuno sfruttare un'alettatura per incrementare la superficie di scambio termico.

Si consideri un'aletta di spessore s , larghezza B e lunghezza l : il calore è dissipato verso l'ambiente dalla faccia superiore, inferiore e frontale dell'aletta: per semplicità, si trascura la quantità di calore ceduta dalla sezione frontale dell'aletta e si ipotizza questa avente lunghezza maggiorata (lunghezza fittizia) pari a $l' = l + \frac{s}{2}$ per compensare tale approssimazione.



Fissato il coefficiente di convezione $h \left[\frac{W}{m^2 K} \right]$, unico per tutte le superfici di scambio di scambio parete ambiente, dette T_p la temperatura di parete e T_{inf} la temperatura del fluido lontano dalla parete alettata, si può definire l'efficienza dell'aletta ε come il rapporto tra il calore scambiato effettivamente dall'aletta ed il calore scambiato dalla medesima aletta in condizioni isoterme (ovvero realizzata con un materiale di conducibilità infinita che permetta di avere un valore di T_p in ogni sezione):

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}_{al}}{\dot{Q}_{max}}$$

Dove

$$\dot{Q}_{al} = \int_{x=0}^{l+\frac{s}{2}} 2hB(T(x) - T_{inf}) dx [W]$$

$$\dot{Q}_{max} = hS_{al} (T_p - T_{inf}) [W]$$

All'aumentare della lunghezza dell'aletta, diminuisce l'efficienza in quanto le sezioni di estremità si trovano a temperature decisamente inferiori rispetto a T_p e quindi scambiano poco calore con l'ambiente: anche se il valore assoluto della potenza termica scambiata cresce all'aumentare della lunghezza dell'aletta, non è conveniente realizzare profili eccessivamente snelli in quanto fragili, difficili da produrre, inutilmente costosi a seguito di ridotti guadagni di superficie efficace di scambio termico.

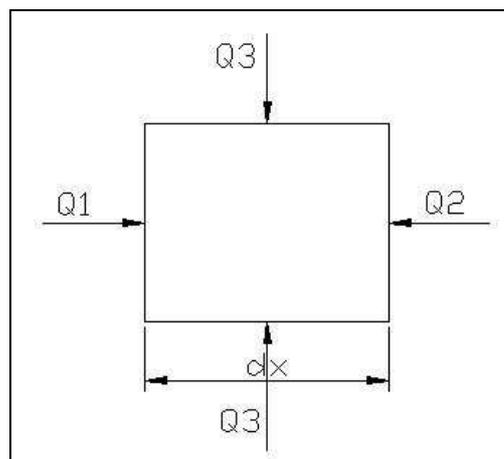
Andamento della temperatura nell'aletta

Per il calcolo del calore scambiato da un aletta, si deve conoscere la distribuzione di temperatura al suo interno $T(x)$.

Per il calcolo di $T(x)$, si risolve l'equazione differenziale di conservazione delle potenze termiche analizzando i flussi di calore entranti ed uscenti da un elementino infinitesimo di aletta di lunghezza pari a dx , spessore s e larghezza B .

Tale elemento è interessato da quattro flussi di calore così riassunti:

- $\dot{Q}_1 = Bs(-\lambda \frac{dT}{dx})_x$ ovvero la potenza termica scambiata per conduzione dalla faccia di sinistra dell'elementino in corrispondenza dell'ascissa x ;
- $\dot{Q}_2 = Bs[(-\lambda \frac{dT}{dx})_{x+dx} - \lambda \frac{d^2T}{dx^2} dx]$ ricavata applicando il teorema del differenziale totale;
- $\dot{Q}_1 - \dot{Q}_2 = 2\dot{Q}_3$ dove \dot{Q}_3 rappresenta la potenza termica scambiata per convezione dalla singola faccia superiore/inferiore dell'aletta. Si noti che tale uguaglianza è valida solo in condizioni stazionarie.



Riscrivendo la relazione precedente si ha:

$$sB\lambda \frac{d^2T}{dx^2} dx = 2hBdx(T(x) - T_{\text{inf}})$$

La quale, semplificata, dà luogo all'equazione differenziale che governa l'andamento della temperatura all'interno dell'aletta.

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{2h}{s\lambda}(T - T_{\text{inf}})$$

Tale equazione non è l'equazione di Fourier ma è bensì la medesima equazione che descrive le onde acustiche e le onde elettromagnetiche e può anche dare soluzioni oscillanti le quali però non hanno senso fisico in questo caso.

Ponendo $\frac{2h}{s\lambda} = m^2$ e $(T - T_{\text{inf}}) = \Theta$ si può scrivere:

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} = m^2\Theta$$

Questa equazione presenta la seguente soluzione generale:

$$\Theta = Ae^{-mx} + Be^{mx}$$

La soluzione sarà di tipo oscillante se m è un numero complesso. Vista la definizione precedentemente data di m , questo non è fisicamente possibile. I termini A, B sono da determinarsi imponendo due condizioni al contorno. In particolare:

- $x = 0 \longrightarrow \Theta = \Theta_p - Rc\dot{Q}$ che, considerando la presenza di un'eventuale resistenza di contatto, permette di scrivere la seguente relazione:

$$\lambda \left(\frac{d\Theta}{dx} \right)_{x=0} = \frac{\Theta_p - \Theta_{x=0}}{Rc}$$

- $x = L \longrightarrow \lambda \left(\frac{d\Theta}{dx} \right)_{x=L} = 0$: questa è una condizione al contorno non vera in quanto l'aletta anche per $x=L$ scambia calore: in teoria, sarebbe formalmente corretto imporre una condizione che uguagli il flusso termico conduttivo con il flusso asportato per convezione. In questo caso, si preferisce indicare tale condizione al contorno al fine di semplificare la trattazione analitica del problema con l'unica accortezza di adottare, come già precedentemente esposto, una lunghezza L maggiorata del semispessore dell'aletta al fine di ottenere un'approssimazione accettabile.

Sostituendo e ricordando l'espressione di Θ , si ricava la seguente espressione che fornisce l'andamento della temperatura di un elemento infinitesimo dell'aletta in funzione dell'ascissa x :

$$T(x) = T_{\text{inf}} + (T_p - T_{\text{inf}}) \frac{e^{-mx}}{(e^{2ml} + 1) + m\lambda Rc(e^{2ml} - 1)} (e^{2ml} + e^{2mx})$$

Calcolo potenza scambiata ed efficienza aletta

Per calcolare la potenza termica scambiata dall'aletta si utilizza la seguente relazione:

$$\dot{Q}_{al} = \int_{x=0}^{l+\frac{s}{2}} 2hB (T(x) - T_{\text{inf}}) dx [W]$$

Nella quale, sostituendo l'espressione di T(x) appena ricavata, si ha:

$$\dot{Q}_{al} = \frac{2Bh(T_p - T_{\text{inf}})(e^{2mL'} - 1)}{m(e^{2mL'+1}) + m^2 \lambda Rc(e^{2mL'} - 1)}$$

Ricordando la definizione di efficienza dell'aletta ε , si giunge alla seguente relazione:

$$\varepsilon = \frac{1}{mL'} \frac{1}{\coth(mL') + m\lambda Rc}$$

Il cui andamento è diagrammato per varie geometrie di alette, spesso in funzione del rapporto lunghezza/spessore o in funzione di particolari raggruppamenti adottati dagli sperimentatori delle varie geometrie (cfr fig 3 allegati).

Infatti, come spesso accade in questo corso, la trattazione analitica di molti problemi è assai complessa e spesso semplificata per giungere a risultati che possono essere più o meno aderenti a rilevamenti sperimentali. Per ciò, nello studio di problemi riguardanti geometrie diverse da quella esposta, si preferisce ricorrere ad esperimenti pratici ricavando relazioni da operazioni di fitting dei valori rilevati.

Se le condizioni al contorno non fossero quelle imposte, esistono tabelle che forniscono il valore della potenza scambiata e dell'efficienza dell'aletta caso per caso.

In generale comunque si nota come l'efficienza dell'aletta subisca un rapido decremento quando questa diviene molto snella; a ciò si aggiunge anche la difficoltà di realizzazione di alette lunghe e sottili a causa della loro intrinseca fragilità: per tale ragione, spesso nella pratica si realizzano alette non particolarmente snelle con alti valori di ε .

Calcolo efficienza alettatura

Si definisce efficienza dell'alettatura ε' il rapporto tra la potenza complessivamente scambiata dalla parete alettata \dot{Q}_{tot} e la potenza scambiata dall'intera parete priva di alette considerata isoterma \dot{Q}_{max} .

$$\varepsilon' = \frac{\dot{Q}_{tot}}{\dot{Q}_{max}}$$

L'efficienza dell'alettatura, da non confondere con l'efficienza della singola aletta, esprime il vantaggio riguardo alla potenza termica scambiata da una parete alettata rispetto alla medesima parete priva di alette.

In pratica, si rapporta la potenza scambiata da una *prima* superficie "fittizia", pari alla somma della superficie non alettata della parete S_{non-al} con la superficie totale delle alette S_{al} moltiplicata per l'efficienza della singola aletta ε , con la potenza scambiata da una *seconda* superficie pari all'area totale della parete S .

Per come è definito tale parametro, questo risulta sempre >1 .

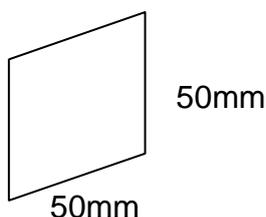
$$\begin{aligned}\dot{Q}_{tot} &= h(T_p - T_{inf})(S_{non-al} + N\varepsilon S_{al}) \\ \dot{Q}_{max} &= hS(T_p - T_{inf})\end{aligned}$$

Dove N è il numero di alette presenti sulla superficie.

Si ricorda come nel calcolo di S_{al} si devono considerare entrambe le facce inferiori e superiori dell'aletta, aventi larghezza B e lunghezza pari a L' precedentemente definita.

Esercizio (raffreddamento CPU)

Un processore di computer di dimensioni 50x50 mm immerso in aria a $T_{\infty}=20$ °C deve dissipare una potenza termica $Q=20$ W. Determinare la temperatura di parete T_p considerando la scheda CPU una lastra piana di pianta quadrata. Si vadano poi a valutare i benefici introdotti dall'alettatura.



La relazione che ci consente di determinare T_P è quella già più volte affrontata durante il corso:

$$Q = h \cdot S \cdot (T_P - T_\infty)$$

Trovandoci in condizioni di convezione naturale si va a definire un nuovo raggruppamento adimensionale, il numero di Grashof:

$$Gr = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\nu^2} \quad \text{con } \beta = \frac{1}{T_m} = \frac{2}{(T_P + T_\infty)}$$

Tale raggruppamento è legato al numero di Nusselt tramite una relazione sperimentale:

$$Nu = 0,53 \cdot Gr^{0,25} \cdot Pr^{0,25}$$

Per il calcolo del numero di Grashof è però necessario indicare una T_P^* di primo tentativo che assumiamo uguale a 100 °C, pari alla massima temperatura consentita per il buon funzionamento da catalogo Intel. Si avrà così una $T_m = (T_P + T_\infty)/2 = (373 + 293)/2 = 333 \text{ K} = 60 \text{ °C}$

$$Gr = \frac{9,81 \cdot \frac{2}{(373 + 293)} \cdot 0,05^3 \cdot (100 - 20)}{(16 \cdot 10^{-6})^2} = 1150760 \quad (1)$$

$$Nu = 0,53 \cdot 1150760^{0,25} \cdot 0,71^{0,25} = 15,93 = \frac{h_c \cdot L}{\lambda_{aria}} \quad (2)$$

$$h_c = \frac{Nu \cdot \lambda_{aria}}{L} = \frac{15,93 \cdot 0,03}{0,05} = 9,56 \frac{W}{m^2 K} \quad (3)$$

Considerato il valore particolarmente basso del coefficiente di convezione h_c non si può trascurare il contributo dell'irraggiamento dato da h_{irr} :

$$h_{irr} = \frac{\alpha \cdot \sigma_0 \cdot |T_P^4 - T_\infty^4|}{|T_P - T_\infty|} = \frac{0,8 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot |373^4 - 293^4|}{|100 - 20|} = 6,8 \frac{W}{m^2 K} \quad (4)$$

$$h = h_c + h_{irr} = 9,56 + 6,8 = 16,36 \frac{W}{m^2 K} \quad (5)$$

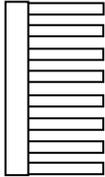
Si può ora determinare T_P :

$$T_P = T_\infty + \frac{Q}{h \cdot S} = 293 + \frac{20}{16,36 \cdot 0,05^2} = 782 \text{ K} = 509 \text{ °C}$$

Essendo la T_P calcolata molto differente dalla T_P^* ipotizzata inizialmente si ripetono iterativamente i passaggi (1),(2),(3),(4) e (5) e si giunge ad un risultato coerente con $h=28,54 \text{ W/m}^2\text{K}$ e $T_P=300 \text{ }^\circ\text{C}$.

Considerata dunque la scheda CPU come lastra piana, la temperatura di parete risulta decisamente troppo elevata. Si valuta quindi ora il vantaggio dato dall'introduzione di una superficie alettata e la nuova T_P raggiunta in tali condizioni.

L'alettatura presa in considerazione è composta da 8 alette di spessore $s=3 \text{ mm}$, lunghezza $L=20 \text{ mm}$ e con un gap tra l'una e l'altra di 3 mm .



$$L_c = L + \frac{s}{2} = 20 + \frac{3}{2} = 21,5 \text{ mm} = 0,0215 \text{ m}$$

Si può quindi ricavare la superficie di una singola aletta:

$$S_{1AL} = 2 \cdot B \cdot L_c = 2 \cdot 0,05 \cdot 0,0215 = 0,00215 \text{ m}^2$$

La potenza termica dissipata può essere ora riscritta come segue:

$$Q = \underbrace{[n_{AL} \cdot S_{1AL} \cdot \varepsilon + S_{TOT} - (n_{AL} \cdot B \cdot s)]}_{S_{EFF}} \cdot h \cdot (T_P - T_\infty)$$

Ora si determina ε dal grafico presente nella figura 3 allegata:

$$L_c^{3/2} \cdot \sqrt{\frac{h}{\lambda_{AL} \cdot s \cdot L_c}} = 0,0215^{1,5} \cdot \sqrt{\frac{28,54}{206 \cdot 0,003 \cdot 0,0215}} = 0,146$$

da cui si ricava $\varepsilon=0,98$

$$S_{EFF} = [(8 \cdot 0,00215 \cdot 0,98) + 0,05^2 - (8 \cdot 0,003 \cdot 0,05)] = 0,018156 \text{ m}^2$$

Si può così individuare il guadagno G dovuto all'alettatura:

$$G = \frac{S_{EFF}}{S_{TOT}} = \frac{0,018156}{0,05^2} = 7,2624$$

Infine si determina T_P in questa condizione:

$$T_P = T_\infty + \frac{Q}{h \cdot S_{EFF}} = 293 + \frac{20}{28,54 \cdot 0,018156} = 331,6 \text{ K} = 58,6 \text{ }^\circ\text{C}$$

In questo modo la temperatura di parete risulta notevolmente più bassa.

Realizzando un'iterazione concettualmente analoga a quella del caso di lastra piana si arriva ad un risultato accettabile con $h=15,75 \text{ W/m}^2\text{K}$ e $T_p=90 \text{ }^\circ\text{C}$. L'adozione di un coefficiente h determinato in modo identico al caso di lastra piana è un passaggio impreciso ed approssimativo in quanto le relazioni sperimentali utilizzate hanno un campo di validità limitato a quella geometria, però ciò si è reso necessario per la mancanza di dati sperimentali più adatti in nostro possesso.

A tal proposito è da notare che l'esercizio è svolto prendendo in considerazione una CPU di parecchi anni fa. I processori moderni presentano una superficie decisamente più ridotta mentre le potenze da dissipare sono maggiori quindi si rende necessaria l'introduzione di una ventola di raffreddamento che generi convezione forzata e con essa un consistente aumento del coefficiente h di scambio termico. In questo caso si utilizzano grafici che forniscono il fattore di Colburn termico J_H in funzione del numero di Reynolds e del tipo di alettatura. Dalla definizione di J_H si ricava poi il numero di Nusselt ed infine l' h corrispondente.

Allegati

17.8 ROUGHNESS

1. Flat plates
2. Circular tubes
3. Longitudinal flow in rod bundles
4. Annuli having roughness on the outer surface of the inner tube
5. Flow normal to circular tubes

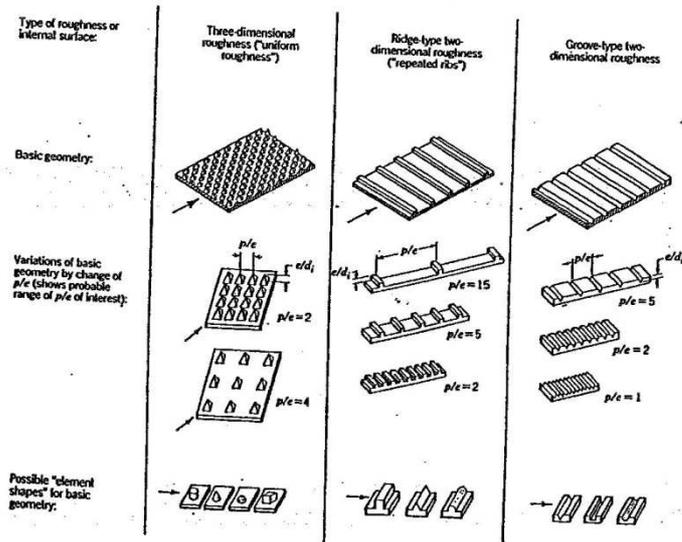


Figure 17.27. Catalog of roughness geometries [74].

fig. 1 - Vari tipi di superfici alettate

TABLE 3.5 Efficiency of common fin shapes

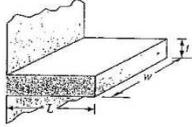
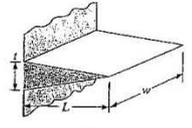
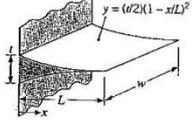
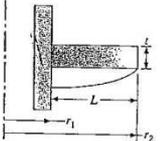
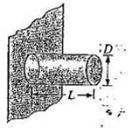
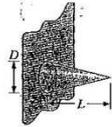
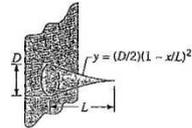
Straight Fins		
<p><i>Rectangular^a</i> $A_f = 2wL_c$ $L_c = L + (t/2)$</p>		$\eta_f = \frac{\tanh mL_c}{mL_c} \quad (3.89)$
<p><i>Triangular^a</i> $A_f = 2w[L^2 + (t/2)^2]^{1/2}$</p>		$\eta_f = \frac{1}{mL} \frac{I_1(2mL)}{I_0(2mL)} \quad (3.93)$
<p><i>Parabolic^a</i> $A_f = w\{C_1L + (L^2/t)\ln(tL + C_1)\}$ $C_1 = [1 + (t/L)^2]^{1/2}$</p>		$\eta_f = \frac{2}{[4(mL)^2 + 1]^{1/2} + 1} \quad (3.94)$
<p>Circular Fin <i>Rectangular^a</i> $A_f = 2\pi(r_2^2 - r_1^2)$ $r_2 = r_1 + (t/2)$</p>		$\eta_f = C_2 \frac{K_1(mr_1)I_1(mr_2) - I_1(mr_1)K_1(mr_2)}{I_0(mr_1)K_1(mr_2) + K_0(mr_1)I_1(mr_2)} \quad (3.91)$ $C_2 = \frac{(2r_1/m)}{(r_2^2 - r_1^2)}$
<p>Pin Fins <i>Rectangular^b</i> $A_f = \pi DL_c$ $L_c = L + (D/4)$</p>		$\eta_f = \frac{\tanh mL_c}{mL_c} \quad (3.95)$
Continued on next page.		
<p><i>Triangular^b</i> $A_f = \frac{\pi D}{2} [L^2 + (D/2)^2]^{1/2}$</p>		$\eta_f = \frac{2}{mL} \frac{I_2(2mL)}{I_1(2mL)} \quad (3.96)$
<p><i>Parabolic^b</i> $A_f = \frac{\pi L^3}{8D} [C_3C_4 - \frac{L}{2D} \ln\{(2DC_4/L) + C_3\}]$ $C_3 = 1 + 2(D/L)^2$ $C_4 = [1 + (D/L)^2]^{1/2}$</p>		$\eta_f = \frac{2}{[4/9(mL)^2 + 1]^{1/2} + 1} \quad (3.97)$
<p>^a$m = (2h/kt)^{1/2}$ ^b$m = (4h/kD)^{1/2}$</p>		

fig. 2 - Efficienza per diversi profili alettati

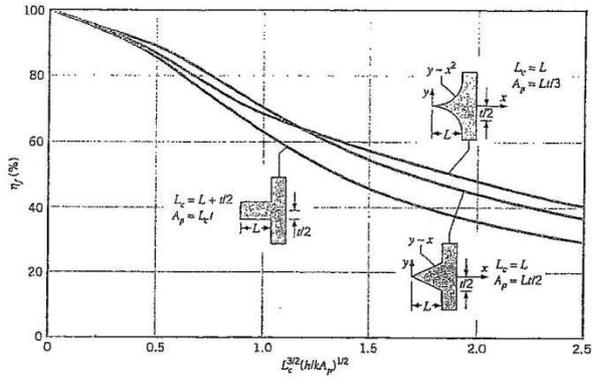


FIGURE 3.18 Efficiency of straight fins (rectangular, triangular, and parabolic profiles).

profile area, $A_p = L_c t$, it follows that

$$mL_c = \left(\frac{2h}{kA_p}\right)^{1/2} L_c^{3/2} \quad (3.90)$$

Hence, as shown in Figures 3.18 and 3.19, the efficiency of a rectangular fin with tip convection may be represented as a function of $L_c^{3/2}(h/kA_p)^{1/2}$.

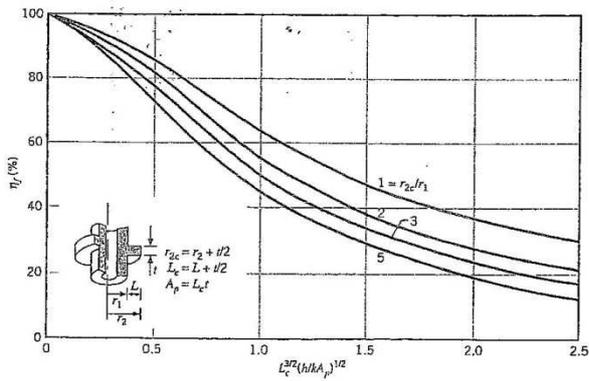


FIGURE 3.19 Efficiency of annular fins of rectangular profile.

fig. 3 - Grafici dell'efficienza di alcuni profili alettati