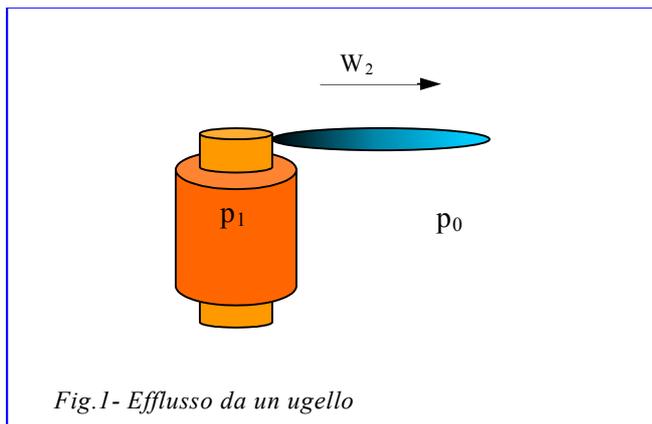


## Esercizio 1

Supponiamo di avere una bombola di volume  $V_1$  contenente un gas alla pressione  $p_1$ . Immaginando di aprire all'improvviso il rubinetto di questa bombola, si osserverà una forte fuoriuscita del gas dall'ugello.

\*Si vuole calcolare la velocità media  $w_2$  del gas uscente.



### Risoluzione

Osserviamo innanzitutto che la velocità di uscita non dipende dalla sezione del foro. Per la risoluzione di questo problema è necessario inoltre considerare soddisfatte le seguenti approssimazioni:

1. il processo può essere considerato adiabatico reversibile, possono cioè essere trascurate tutte le dissipazioni di energia verso l'esterno;
2. l'energia cinetica nello stato iniziale può essere ritenuta nulla, essendo trascurabile rispetto all'energia cinetica nello stato finale.

Consideriamo l'energia totale formata dal contributo dell'energia cinetica e dell'energia interna:

$$\Delta e = \Delta u + \Delta e_c = \Delta u + \frac{w_2^2}{2}$$

Si verifica, tramite considerazioni microscopiche dei fenomeni che avvengono nell'ugello che il lavoro svolto dal sistema verso l'esterno vale:

$$l = p_2 v_2 - p_1 v_1$$

quindi per il primo principio della termodinamica:

$$u_2 - u_1 + \frac{w_2^2}{2} = p_1 v_1 - p_2 v_2$$

Ricordando che:

$$h = u + pv$$

si ha:

$$h_1 - h_2 = \frac{w_2^2}{2}$$

Essendo inoltre:

$$h_1 - h_2 = \int_{p_2}^{p_1} v dp$$

si ottiene l'equazione risoltrice del problema:

$$\frac{w_2^2}{2} = \int_{p_2}^{p_1} v dp$$

E' noto che nelle trasformazioni adiabatiche vale la relazione:

$$pv^\gamma = \text{const}$$

cioè:

$$v = \frac{p_1^{\frac{1}{\gamma}} v_1}{p^\gamma}$$

risolvendo l'integrale:

$$\begin{aligned} \frac{w^2}{2} &= p_1^{\frac{1}{\gamma}} v_1 \int_{p_2}^{p_1} p^{-\frac{1}{\gamma}} dp = p_1^{\frac{1}{\gamma}} v_1 \left[ \frac{p^{-\frac{1}{\gamma}+1}}{-\frac{1}{\gamma}+1} \right]_{p_2}^{p_1} = \frac{p_1^{\frac{1}{\gamma}} v_1}{-\frac{1}{\gamma}+1} \left( p_1^{\frac{1}{\gamma}+1} - p_2^{\frac{1}{\gamma}+1} \right) = \\ &= \frac{\gamma}{\gamma-1} \left( p_1 v_1 - \frac{p_1^{\frac{1}{\gamma}} v_1}{p_2^{\frac{1}{\gamma}-1}} \right) = \frac{\gamma}{\gamma-1} p_1 v_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}-1} \right] \end{aligned}$$

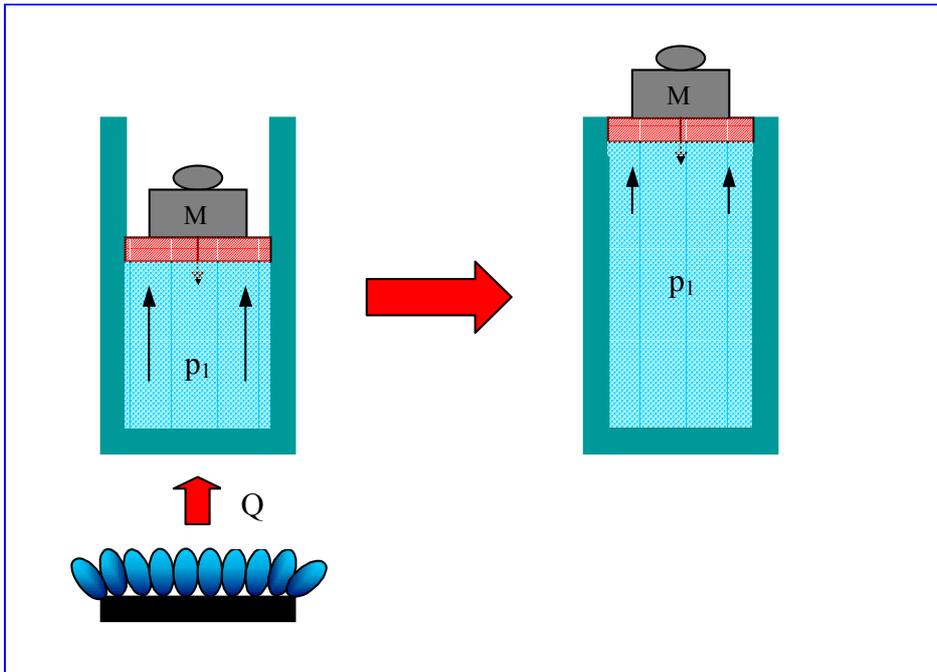
in definitiva la velocità media vale:

$$w = \sqrt{2 \frac{\gamma}{\gamma-1} p_1 v_1 \left( 1 - \frac{p_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{p_2} \right)}$$

## Esercizio 2

Si considera un recipiente contenente un gas a una data pressione  $p_1$  avente la parte superiore mobile, sulla quale è appoggiato un grave di massa  $M$ . Supponendo di comunicare al gas un calore  $Q$ , il gas subirà una trasformazione isobara.

\*Si vuole calcolare il lavoro netto svolto dal sistema e il volume finale.



### Risoluzione

Dal primo principio in forma entalpica si ha:

$$dh = dq + vdp$$

ma essendo la trasformazione isobara:

$$dh = dq$$

integrando dallo stato iniziale a quello finale:

$$\Delta h = q = c_p \Delta T$$

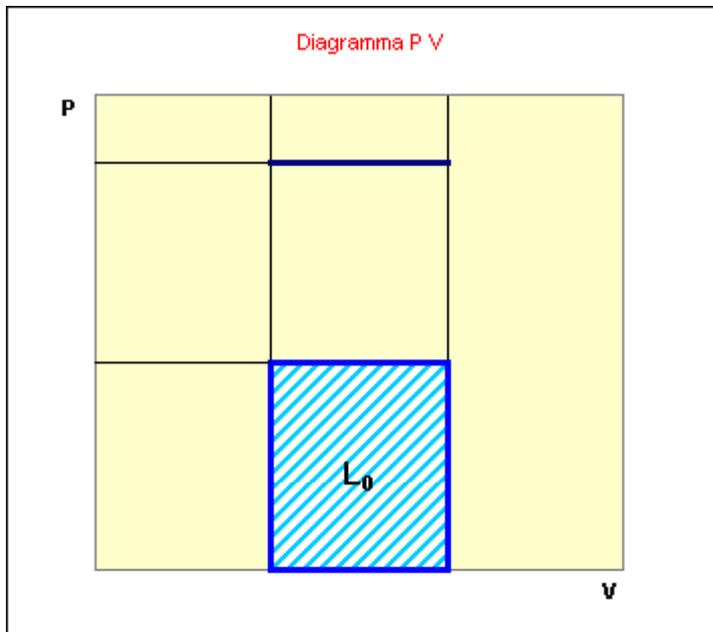
quindi la temperatura finale è data da:

$$T_2 = T_1 + \frac{q}{c_p}$$

Applicando ora l'equazione di stato:

$$v_2 = \frac{RT_2}{p_1} = \frac{R}{p_1} \left( T_1 + \frac{q}{c_p} \right)$$

Vediamo ora il grafico pv della trasformazione:



Calcoliamo ora il lavoro svolto dal sistema sull'ambiente. Siccome:

$$dl = p dv$$

si ottiene osservando il grafico:

$$l = p_1 \Delta v$$

ora bisogna sottrarre a questo lavoro il lavoro svolto dall'ambiente  $l_0$ :

$$l_0 = p_0 \Delta v$$

in cui  $p_0$  è la somma della pressione atmosferica e della pressione esercitata dal grave sul recipiente.

$$p_0 = p_{am} + p_{grave}$$

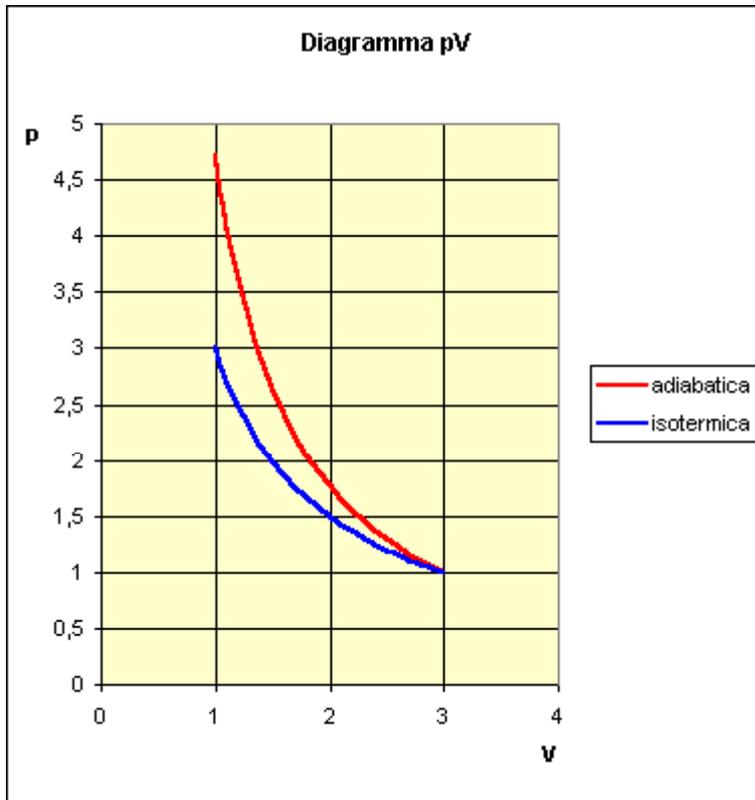
### Esercizio 3

Richiamando l'esercizio 2, supponiamo di avere due pompe da bicicletta differenti: la prima effettua una compressione adiabatica, la seconda una compressione isoterma. Entrambe le pompe agiscono nelle stesse condizioni di pressione iniziale e finale.

\*Si vuole stabilire quale delle due trasformazioni comporta il minor lavoro esterno.

## Risoluzione

Osserviamo il grafico delle due trasformazioni:



Già dal grafico si può intuire che il lavoro minore compete alla trasformazione isoterma. Sappiamo che per una trasformazione isoterma vale la relazione:

$$pV = k_{iso}$$

Ricaviamo quindi il lavoro in tale trasformazione:

$$L_{iso} = Q = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{k_{iso}}{V} dV = p_1 V_1 [\ln V]_{V_1}^{V_2} = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Per la trasformazione adiabatica invece, vale la relazione:

$$pV^\gamma = k_{adia}$$

e il lavoro corrispondente vale:

$$\begin{aligned} L_{adia} &= -\Delta U = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{k_{adia}}{V^\gamma} dV = p_1 V_1^\gamma \left[ \frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right]_{V_1}^{V_2} = \frac{p_1 V_1}{1-\gamma} (V_1^{\gamma-1} V_2^{1-\gamma} - 1) = \\ &= \frac{p_1 V_1}{1-\gamma} \left( \frac{V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}} - 1 \right) \end{aligned}$$

Verifichiamo ora quanto osservato nel grafico, tenendo presente che i lavori sopra calcolati sono negativi:

$$|L_{adia}| > |L_{iso}|$$

$$\frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left( \frac{V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}} - 1 \right) > -p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\frac{1}{\gamma - 1} \left( \frac{V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}} - 1 \right) > \ln \frac{V_1}{V_2}$$

$$\left( \frac{V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}} - 1 \right) > (\gamma - 1) \ln \frac{V_1}{V_2}$$

$$\left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} - 1 > (\gamma - 1) \ln \frac{V_1}{V_2}$$

$$\left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} - 1 > \ln \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}$$

Ponendo ora:

$$\left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = t$$

si ottiene:

$$t - 1 > \ln t$$

disuguaglianza verificata per ogni valore di t.

## Esercizio 4

Si supponga che in un recipiente rigido, con pareti perfettamente adiabatiche, si trovino ossigeno e azoto, divisi da un diaframma, alla pressione e alla temperatura assegnate.

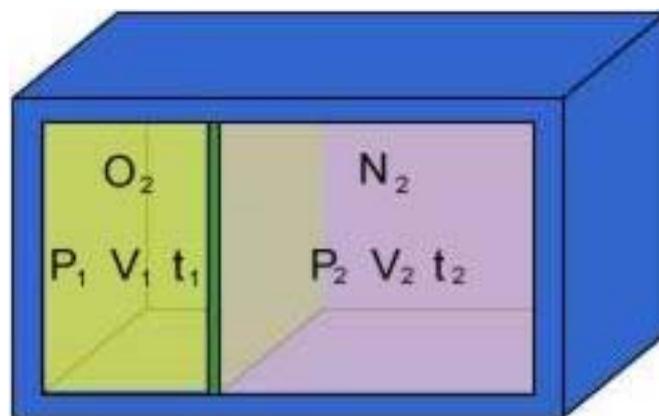


Fig. 1.2

$$P_1 = 1 \text{ BAR} = 100000 \text{ Pa} \quad P_2 = 2 \text{ BAR} = 200000 \text{ Pa}$$

$$V_1 = 1 \text{ m}^3$$

$$t_1 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$V_2 = 2 \text{ m}^3$$

$$t_2 = 200 \text{ }^\circ\text{C}$$

Togliendo il diaframma, i due gas si miscelano e, dopo un certo tempo, la miscela risulta fisicamente omogenea.

\*Calcolare il volume ( $V_3$ ), la massa ( $M_3$ ), la temperatura( $t_3$ ) e la pressione( $P_3$ ) del miscuglio.

\*Determinare la composizione del NITROX (in massa e in volume).

\*Calcolare la variazione di entropia del sistema.

### Risoluzione

$$V_3 = V_1 + V_2 = 2 + 1 = 3 \text{ m}^3$$

$$M_3 = M_1 + M_2$$

Le masse  $M_1$  e  $M_2$  possono essere ricavate dall' equazione dei gas perfetti

$$P_1 V_1 = M_1 R_1 T_1$$

$$P_2 V_2 = M_2 R_2 T_2$$

$$M_1 = \frac{P_1 V_1}{R_1 T_1} = \frac{100000 \cdot 1}{\frac{8314}{32} \cdot 373} = 1.03 \text{ kg}$$

$$M_2 = \frac{P_2 V_2}{R_2 T_2} = \frac{200000 \cdot 2}{\frac{8314}{28} \cdot 473} = 2.85 \text{ kg}$$

quindi

$$M_3 = 1.03 + 2.85 = 3.88 \text{ kg}$$

Ricaviamo la temperatura del miscuglio dall' espressione della sua energia interna:

$$U_3 = M_3 c'_v t_3 \quad (5)$$

dove  $c'_v$  è una media pesata delle costanti termiche  $c_{v1}$  e  $c_{v2}$  dei componenti della miscela, ossia:

$$c'_v = \frac{M_1 c_{v1} + M_2 c_{v2}}{M_1 + M_2} \quad (6)$$

Poiché sia il lavoro compiuto che il calore scambiato sono nulli, tale è anche la variazione dell'energia interna:

$$U_3 = U_1 + U_2 = M_1 c_{v1} t_1 + M_2 c_{v2} t_2 \quad (7)$$

Per calcolare  $c_{v1}$  e  $c_{v2}$ , sfrutto le due note relazioni:

$$c_p - c_v = R$$

$$\frac{c_p}{c_v} = \gamma = 1.41 \quad (8)$$

Per quanto riguarda l'  $O_2$ :

$$\begin{cases} c_p - c_v = \frac{8314}{32} \\ c_p = \gamma \cdot c_v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1.41 \cdot c_v - c_v = \frac{8314}{32} \\ c_p = 0.41 \cdot c_v \end{cases} \Leftrightarrow c_v = 0.634 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$$

Con un procedimento del tutto analogo, calcoliamo la  $c_v$  per l'azoto

Dunque

$$c_{V_1} = 0.634 \frac{kJ}{kgK}$$

$$c_{V_2} = 0.724 \frac{kJ}{kgK}$$

Abbiamo tutti i dati per calcolare l'energia interna della miscela ( $U_3$ ) e la sua costante termica a volume costante

$$U_3 = 1.03 \cdot 0.634 \cdot 100 + 2.85 \cdot 0.724 \cdot 200 = 487kJ$$

$$c_V' = \frac{1.03 \cdot 0.634 + 2.85 \cdot 0.724}{3.88} = 0.700 \frac{kJ}{kgK}$$

Infine, determiniamo la temperatura  $t_3$

$$t_3 = \frac{U_3}{M_3 c_V'} = \frac{478}{3.88 \cdot 0.700} = 175.95^\circ C \approx 176^\circ C$$

L'ultima grandezza da calcolare è la pressione  $P_3$

Anche per il miscuglio finale posso scrivere l'equazione dei gas perfetti :

$$P_3 V_3 = M_3 R' T_3$$

da questa ricaviamo  $P_3$ , dopo aver calcolato la costante  $R'$

$$R' = \frac{M_1 R_1 + M_2 R_2}{M_1 + M_2} = \frac{1.03 \cdot \frac{8314}{32} + 2.85 \cdot \frac{8314}{28}}{3.88} = 287 \frac{J}{kgK}$$

Dunque

$$P_3 = \frac{M_3 R' T_3}{V_3} = \frac{3.88 \cdot 287 \cdot 449}{3} = 166663 Pa = 1.67 bar$$

\*Determiniamo le percentuali in massa (o ponderali) della miscela. Si indicano generalmente con la lettera **g**.

$$g_{O_2} = \frac{M_{O_2}}{M_{TOT}} = \frac{1.03}{3.88} = 0.2654 = 26.54\%$$

$$g_{N_2} = \frac{M_{N_2}}{M_{TOT}} = \frac{2.85}{3.88} = 0.7346 = 73.46\%$$

Calcoliamo, infine, le percentuali in volume (o molari). Si indicano con **x**. In generale

$$x_i = \frac{n_i}{n_{TOT}}$$

$$n_{O_2} = \frac{M_{O_2}}{\mu_{O_2}} = \frac{1.03}{32} = 0.0321875 kmol$$

$$n_{N_2} = \frac{M_{N_2}}{\mu_{N_2}} = \frac{2.85}{28} = 0.10178 kmol$$

$$n_{TOT} = n_{O_2} + n_{N_2} = 0.1339 kmol \approx 0.134 kmol$$

$$x_{O_2} = \frac{n_{O_2}}{n_{TOT}} = \frac{0.0321875}{0.134} = 0.240 = 24\%$$

$$x_{N_2} = \frac{n_{N_2}}{n_{TOT}} = \frac{0.10178}{0.134} = 0.760 = 76\%$$

\*Per quanto riguarda l' entropia del nostro sistema, è intuitivo concludere che, durante l' operazione di miscela considerata, si produce una variazione positiva di entropia, comunemente detta "entropia di mescolamento".

Sappiamo che, per una generica trasformazione da uno stadio  $a$  ad uno stadio  $b$ , la variazione di entropia di un singolo gas in una miscela di gas ideali può essere determinata dalla formula :

$$\Delta S = M \left[ c_V \cdot \ln \frac{T_b}{T_a} + R \cdot \ln \frac{V_b}{V_a} \right] \quad (9)$$

Nel caso del nostro esercizio:

$$\Delta S_1 = M_1 \left[ c_{V_1} \cdot \ln \frac{T_3}{T_1} + R_1 \cdot \ln \frac{V_3}{V_1} \right]$$

e

$$\Delta S_2 = M_2 \left[ c_{V_2} \cdot \ln \frac{T_3}{T_2} + R_2 \cdot \ln \frac{V_3}{V_2} \right]$$

E' importante notare come nelle due formule sia presente il volume finale  $V_3$

$$\Delta S_1 = 1.03 \left[ 0.634 \cdot \ln \frac{449}{373} + \frac{8314}{32} \cdot \ln \frac{3}{1} \right] = 0.415 \frac{kJ}{K}$$

$$\Delta S_2 = 2.85 \left[ 0.724 \cdot \ln \frac{449}{473} + \frac{8314}{28} \cdot \ln \frac{3}{2} \right] = 0.235 \frac{kJ}{K}$$

$$\Delta S_3 = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 0.65 \frac{kJ}{K}$$

## Esercizio 5

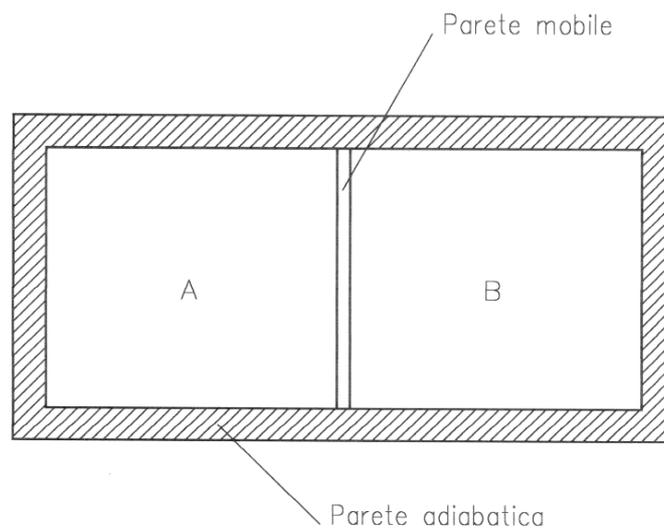


Figura 2

In un contenitore adiabatico, come quello rappresentato in Figura 2 sono presenti due sistemi separati da una parete che consente la miscelazione delle due parti.

Il sistema A contiene vapore saturo d'acqua:  $M_A = 1\text{Kg}$ ,  $p_A = 9,8\text{ bar}$ ,  $x_A = 0,1$ .

Il sistema B contiene un liquido:  $M_B = 2\text{Kg}$ ,  $p_B = 0,98\text{ bar}$ ,  $x_B = 0,5$ .

\* Ricavare i valori finali della miscela ottenuta, che si troverà in un punto intermedio tra A e B, quindi  $p_F$ ,  $x_F$ ,  $t_F$ .

## Risoluzione

Si supponga che il contenitore abbia al suo interno gas perfetto, quindi aria.

Si scrivano le equazioni di conservazione della massa e dell'energia, inoltre si scriva l'equazione di conservazione del volume, altrimenti le equazioni non sarebbero sufficienti per la risoluzione del problema.

Si consideri il diagramma ( $p-v$ ), dove si può notare che all'interno della zona di equilibrio tra liquido e vapore, racchiusa dalla curva limite di Andrews, i cambiamenti di stato tra liquido e vapore hanno luogo gradualmente (Fig. 2).

Nel caso A avremo una pressione  $p$  alta e di conseguenza un titolo  $x$  basso, quindi il punto sarà posto più vicino all'asse delle ordinate; nel punto B avremo una pressione  $p$  inferiore e un titolo  $x$  più alto, di conseguenza il punto sarà più vicino all'asse delle ascisse e più lontano dall'asse delle ordinate.

Chiamiamo con F la situazione finale, quindi la miscelazione.

Equazione sulla Conservazione della massa: il sistema è chiuso la massa si conserva, di conseguenza la massa finale vale

$$M_F = \sum_i M_i \quad (1.01)$$

$M_i$  indica la massa dei sistemi presenti nel contenitore, la sua unità di misura è: Kg.

Equazione sulla Conservazione del volume: il volume del contenitore nel punto F rimane invariato.

$$V_F = M_F * v_F = \sum_i V_i \quad (1.02)$$

$v_F$  è definito come volume specifico finale, la sua unità di misura è:  $\text{m}^3$ .

I volumi totali  $V_i$  sono stati scritti in termini di massa e di volume specifico.

Si ricava il volume iniziale, cioè il volume del contenitore:

$$v_i = v_{li} + x_i * v_{di} \quad (1.03)$$

$v_i$  definisce il volume specifico di  $i$ , la sua unità di misura è  $\frac{\text{m}^3}{\text{Kg}}$ .

$x_i$  è il titolo del sistema  $i$ .

$v_{li}$  indica il volume del sistema  $i$ .

$v_{di}$  è definito come il volume differenziale di  $i$ , cioè la lunghezza del segmento sotteso alla curva di Andrews.

Di conseguenza aumentando la pressione, il volume differenziale (cioè la differenza tra il volume occupato dal liquido e dal vapore saturo, con la stessa massa) tende ad aumentare.

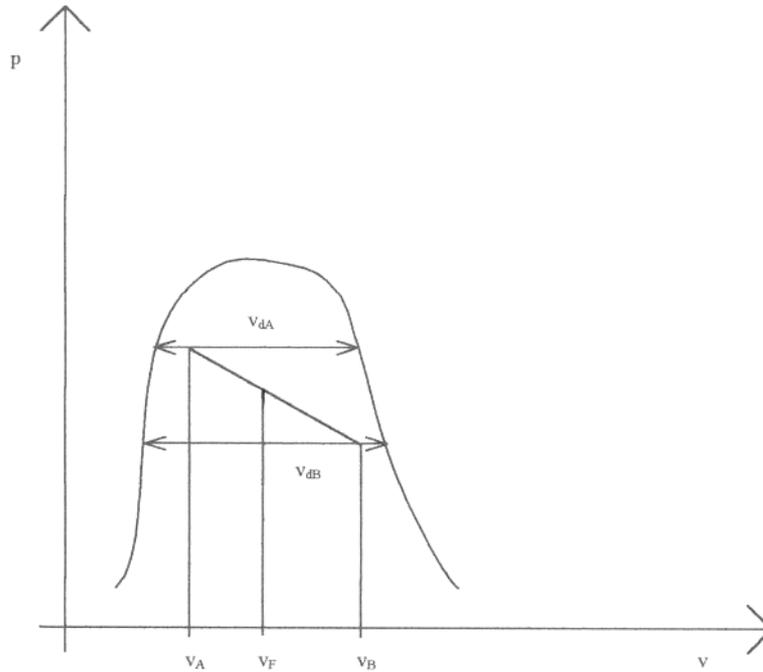


Figura 2 Diagramma ( $p$ - $v$ ) del vapore.

Dalle tabelle si ricavano i valori di  $v_{li}$  e  $v_{di}$ .

Aumentando la pressione il volume del liquido in B aumenta.

Si ricava il volume specifico finale dalla (1.2) e vale

$$v_F = \frac{(M_A * v_A + M_B * v_B)}{M_F} \quad (1.04)$$

Ora si conosce il volume specifico di F e lo si può tracciare nel grafico, quindi posso tracciare la retta sulla quale si posiziona il punto F che soddisfa tutte le equazioni sul bilancio energetico.

Equazione sulla Conservazione dell'energia interna totale:

$$U_F - (U_A + U_B) = Q - L = 0 \quad (1.05)$$

$U_i$  indica l'energia interna dei sistemi  $i$ .

Essendo un contenitore chiuso e adiabatico, non c'è alcun scambio di calore e di lavoro, perché le superfici sono rigide.

Tramite questa equazione si può ricavare lo stato fisico finale del sistema.

$$M_F * u_F = \sum_i M_i * u_i \quad (1.06)$$

$u_i$  indica l'energia interna specifica, la sua unità di misura è:  $\frac{KJ}{Kg}$ .

in questo modo si esprime la (1.5) in termini di grandezze specifiche.

$u_i$  lo si calcola con le formule relative ai vapori e vale

$$u_i = u_{li} + x_i * (r_i - p_i * v_{di}) \quad (1.07)$$

$r_i$  lo si ricava dalle tabelle termodinamiche.

Dall'equazione sulla conservazione dell'energia interna totale si ricava che:

$$u_F = \frac{(M_A * u_A + M_B * u_B)}{M_F} \quad (1.08)$$

Si conosce  $v_F$  e  $u_F$ , ora rimane da trovare  $x_F$ ; le tabelle forniscono  $u_1, x, r, p$ .  
Dato che conosco quanto vale  $u_F$  lo si può scrivere in altra forma

$$u_F = u_{1F} + x_F * (r_F + p_F * v_{dF}) \quad (1.09)$$

Conoscendo la pressione  $p_F$  e il volume  $V_F$  si ricava  $x_F$  e vale

$$x_F = \frac{v_F - v_{1F}}{v_{dF}} \quad (1.10)$$

Per tentativi assegno  $p_F$  e attraverso le tabelle si ricava  $x_F$  in modo che venga soddisfatta l'energia interna specifica  $u_F$  nota.

Ora effettuando i calcoli si può ricavare i valori finali della miscela;

Dalla (1.01):  $M_F = 1 + 2 = 3 \text{ Kg}$

Dalla (1.03):  $v_A = 0,001126 + 0,1 * 0,1969 = 0,0208 \frac{\text{m}^3}{\text{Kg}}$

$$v_B = 0,001043 + 0,5 * 1,724 = 0,863 \frac{\text{m}^3}{\text{Kg}}$$

Dalla (1.04):  $v_F = \frac{(1 * 0,0208 + 2 * 0,863)}{3} = 0,5823 \frac{\text{m}^3}{\text{Kg}}$

Si trasformi la pressione da bar a Pascal:  $p_A = 9,8 * 10^5 = 980 \text{ KPa}$

$$p_B = 0,98 * 10^5 = 98 \text{ KPa}$$

Dalla (1.07):  $u_A = 759 + 0,1 * (2018 - 980 * 0,1969) = 941 \frac{\text{KJ}}{\text{Kg}}$

$$u_B = 415 + 0,5 * (2259 - 98 * 1,724) = 1460 \frac{\text{KJ}}{\text{Kg}}$$

Dalla (1.08):  $u_F = \frac{(1 * 941 + 2 * 1460)}{3} = 1287 \frac{\text{KJ}}{\text{Kg}}$

Assegnando  $p_F = 284 \text{ KPa}$ ,  $x_F$  risulta pari a 0,94 di conseguenza  $u_F$  sarà uguale a  $2425 \frac{\text{KJ}}{\text{Kg}}$ , ma il valore ottenuto è troppo alto quindi si procede assegnando una pressione  $p$  più bassa.

$p_F$	$x_F$	$u_F$
284	0,94	2425
196	0,65	1820
147	0,49	1472
118	0,4	1260

Quest'ultimo valore si avvicina maggiormente al valore noto di  $u_F$ , quindi il problema è terminato.