I sistemi aperti

Finora ci siamo limitati a considerare i cosiddetti sistemi chiusi cioè una regione di spazio delimitata da un confine, che può essere reale o apparente, rigida o deformabile, che impedisce lo scambio di materia fra il sistema e l’ambiente. Ciò vuol dire che la massa si mantiene costante nel tempo e, per di più, le molecole che la costituiscono sono sempre le stesse.
In realtà, come già sappiamo dallo studio del primo Principio della termodinamica, la Teoria della relatività di Einstein lega la variazione di massa alla variazione di energia

$$E = M \cdot c^2 \qquad (33)$$

dove $c = 3 \cdot 10^8 \, {}^{m}\!/_{s}$ è la velocità della luce.
Nello studio da noi condotto trascuriamo quanto sostenuto dalla Teoria della relatività di Einstein in quanto, avendo un elevato coefficiente di proporzionalità, ad una sensibile variazione di energia corrisponde un’irrilevante variazione di massa.
Estendiamo ora lo studio finora condotto ai cosiddetti sistemi aperti ricavando per questi il bilancio della massa e il bilancio dell’energia.
Innanzitutto diamo la definizione rigorosa di sistema aperto: si definisce sistema aperto un determinato volume dello spazio racchiuso da una superficie, detta confine del sistema, attraverso la quale può entrare o uscire una certa quantità di materia. Il confine e il volume, in esso racchiuso, sono entrambi invarianti nel tempo. Tutti i fenomeni che avvengono nel volume, e quindi anche i flussi di materia, sono considerati trasformazioni del sistema.
La maggior parte della superficie di confine di questo sistema è impermeabile al flusso di materia, presenta però alcune zone, dette sezioni d’ingresso, attraverso le quali la materia può entrare e alcune zone, dette sezioni d’uscita, attraverso le quali la materia può uscire, queste vengono quindi realizzate attraverso una superficie permeabile.
Nel nostro studio considereremo dei sistemi aperti semplici che presentano una sola sezione d’ingresso e una sola sezione d’uscita a massa costante, cioè la stessa quantità di massa che entra deve anche uscire. Ciò che consideriamo è allora un sistema aperto stazionario in cui anche la temperatura, la pressione, il volume e i flussi del sistema devono essere gli stessi in ogni istante di tempo.
La stazionarietà del sistema non è una caratteristica di tutti i sistemi aperti, può però essere realizzata, in casi particolari attraverso opportuni sistemi di controllo. Un esempio di sistema aperto stazionario è un impianto termoelettrico. Un sistema aperto con una sola sezione d’ingresso e una sola sezione d’uscita può essere schematizzato nella pagina seguente.

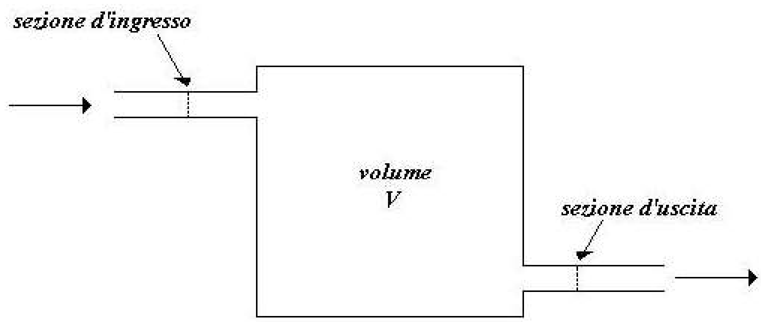

Fig. 1 – Sistema aperto con una sola sezione d’ingresso e una sola sezione d’uscita

Abbiamo una superficie che racchiude il volume V e una sola sezione d'ingresso S_1 e una sola sezione d'uscita S_2.
Per affrontare lo studio di questo sistema aperto semplice si utilizzano i metodi d'indagine termodinamica visti per i sistemi chiusi: si consideri un sistema chiuso, detto sistema ausiliario, che si sposta nello spazio per un certo intervallo di tempo e contemporaneamente una regione di spazio fissa che viene attraversata, nell'intervallo di tempo, dal sistema: questa regione di spazio costituisce il sistema aperto.
Per rappresentare graficamente quanto detto si rappresenta il sistema in una forma semplificata rispetto a quanto visto precedentemente, in particolare rappresentiamo il sistema aperto come un tubo con una superficie laterale impermeabile.
Allora all'istante $\tau = \tau_0$ avremo:

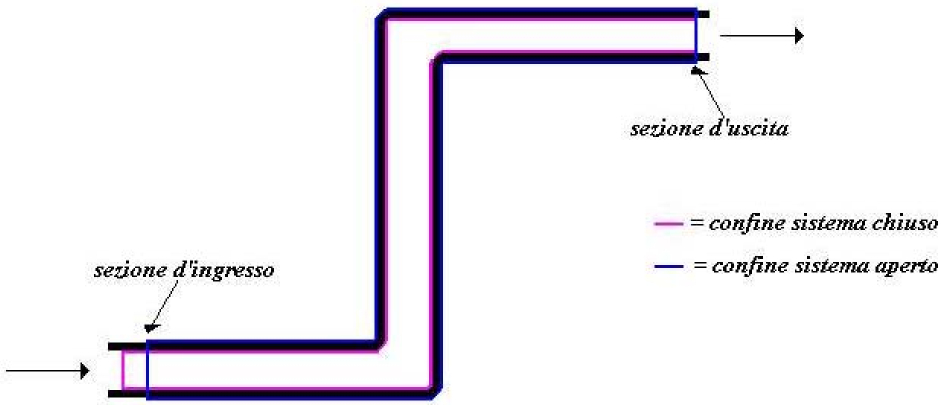

Fig. 2 – Sistema aperto all'istante iniziale

dopo un tempo $\Delta\tau$ avremo:

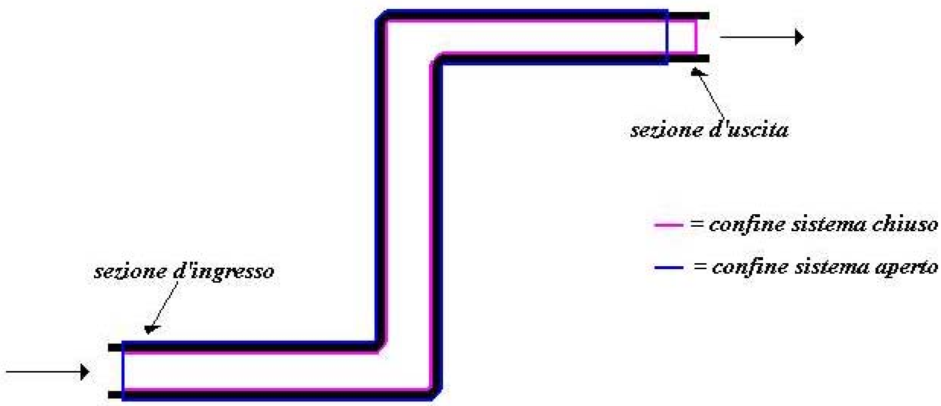

Fig. 3 – Sistema aperto all'istante finale

Al trascorrere del tempo, al sistema aperto è associato sia una variazione di massa che una variazione di energia. Come già anticipato, supponiamo che la massa rimanga costante, cioè che la

quantità di massa che entra dalla sezione d'ingresso sia uguale alla massa che esce dalla sezione d'uscita.
Va notato che i risultati ricavati da questo sistema semplice saranno poi estensibili al caso di sistemi aperti più complessi con più sezioni d'ingresso e più sezioni d'uscita.
Vediamo allora il bilancio dell'energia.

Bilancio di energia per un sistema aperto

Supponiamo che il nostro sistema ad un certo istante $\tau = \tau_0$ abbia una certa massa M_{SA} all'interno del sistema e una certa massa ΔM_1 nel tubo collegato alla sezione S_1 pronta ad entrare; a queste masse, sono associate le relative energie E_{SA} e ΔE_1.
Dopo un tempo $\Delta\tau$, e quindi all'istante $\tau = \tau_0 + \Delta\tau$, la massa ΔM_1 è entrata nel sistema e si ha una massa ΔM_2, nel tubo collegato alla sezione d'uscita S_2, che esce dal sistema.
Come precedentemente anticipato supponiamo che il sistema sia stazionario e quindi che la quantità di massa ΔM_1 che entra nel sistema sia uguale alla quantità di massa ΔM_2 che esce, allora all'istante $\tau = \tau_0 + \Delta\tau$ avremo ancora una massa M_{SA} uguale a quella presente all'istante $\tau = \tau_0$.
Come nello stato precedente, alle masse M_{SA} e ΔM_2 sono associate le relative energie E_{SA} e ΔE_2.
Notiamo che mentre la massa ΔM_1 è uguale alla massa ΔM_2, per l'ipotesi di stazionarietà fatta, l'energia ΔE_1 è diversa dall'energia ΔE_2.
Vediamo allora il bilancio di energia di questo sistema, utilizzando il concetto di sistema ausiliario, cioè il sistema chiuso che si sposta nel tempo; in questo modo sarà possibile utilizzare i concetti studiati per i sistemi chiusi per ricavare le nozioni che descrivono i sistemi aperti.
Vediamo allora come la situazione descritta precedentemente per il sistema aperto possa essere interpretata con il sistema chiuso ausiliario: supponiamo che all'istante $\tau = \tau_0$, al quale si incomincia ad osservare il sistema, il sistema chiuso ausiliario sia in posizione tale da comprendere tutta la massa contenuta nel sistema aperto di volume V più la porzione di massa ΔM_1 nel tubo collegato alla sezione d'ingresso S_1. Supponiamo poi, che all'istante $\tau = \tau_0 + \Delta\tau$, al quale concludo l'osservazione del sistema, il sistema chiuso ausiliario sia in posizione tale da comprendere tutta la massa contenuta nel sistema aperto di volume V più la porzione di massa ΔM_2 contenuta nel tubo collegato alla sezione d'uscita S_2.
Notiamo subito che per esprimere il principio di conservazione dell'energia per un sistema aperto dovremo considerare anche forme di energia quali l'energia cinetica e l'energia potenziale, supposte trascurabili nel caso di sistemi chiusi, in quanto considerati sistemi privi di un moto d'insieme.
Allora le energie ΔE_1 e ΔE_2 associate alle masse ΔM_1 e ΔM_2 sono date dalle formule:

$$\Delta E_1 = \Delta M_1 \cdot \left(e_{c1} + e_{p1} + u_1\right) \qquad (1)$$
$$\Delta E_2 = \Delta M_2 \cdot \left(e_{c2} + e_{p2} + u_2\right) \qquad (2)$$

dove le varie forme di energia sono state espresse tramite i valori specifici, per cui:

$e_{c1} = \dfrac{E_{c1}}{\Delta M_1}$ = ENERGIA CINETICA SPECIFICA DELLA MASSA ΔM_1 (3)

$e_{c2} = \dfrac{E_{c2}}{\Delta M_2}$ = ENERGIA CINETICA SPECIFICA DELLA MASSA ΔM_2 (4)

$e_{p1} = \dfrac{E_{p1}}{\Delta M_1}$ = ENERGIA POTENZIALE SPECIFICA DELLA MASSA ΔM_1 (5)

$e_{p2} = \dfrac{E_{p2}}{\Delta M_2} =$ ENERGIA POTENZIALE SPECIFICA DELLA MASSA ΔM_2 (6)

$u_1 = \dfrac{U_1}{\Delta M_1} =$ ENERGIA INTERNA SPECIFICA DELLA MASSA ΔM_1 (7)

$u_2 = \dfrac{U_2}{\Delta M_2} =$ ENERGIA INTERNA SPECIFICA DELLA MASSA ΔM_2 (8)

Il bilancio dell'energia del sistema aperto può allora essere fatto appoggiandosi al sistema ausiliario chiuso per cui vale il primo Principio della termodinamica o Principio di conservazione dell'energia:

$$\Delta E = E_{\tau_0+\Delta\tau} - E_{\tau_0} = Q - L \qquad (9)$$

nel quale, come già sappiamo, la variazione di energia può avvenire solo per scambi di lavoro e di calore.
Per come abbiamo definito prima il sistema chiuso, all'istante $\tau = \tau_0$ l'energia è data dalla somma dell'energia associata alla massa del sistema aperto E_{SA} e dell'energia associata alla massa entrante nel sistema ΔE_1, mentre all'istante $\tau = \tau_0 + \Delta\tau$ l'energia è data dalla somma dell'energia associata alla massa del sistema aperto E_{SA} e dell'energia associata alla massa uscente dal sistema ΔE_2.

$$E_{\tau_0+\Delta\tau} = E_{SA} + \Delta E_2 \qquad (10)$$
$$E_{\tau_0} = E_{SA} + \Delta E_1 \qquad (11)$$

Allora il bilancio di energia visto precedentemente può essere riscritto nel seguente modo:

$$E_{SA} + \Delta M_2 \cdot \left(e_{c2} + e_{p2} + u_2\right) - \left[E_{SA} + \Delta M_1 \cdot \left(e_{c1} + e_{p1} + u_1\right)\right] = Q - L \qquad (12)$$

Semplificando l'energia associata alla massa del sistema aperto, perché per ipotesi il sistema è stazionario e quindi la massa non cambia, otteniamo:

$$\Delta M_2 \cdot \left(e_{c2} + e_{p2} + u_2\right) - \Delta M_1 \cdot \left(e_{c1} + e_{p1} + u_1\right) = Q - L \qquad (13)$$

dove Q, che indicheremo con Q_{SA}, è il calore scambiato tra il sistema e l'ambiente attraverso il confine, mentre L è il lavoro, il quale è formato da tre contributi: il lavoro scambiato attraverso l'albero rotante che indicheremo con L_{SA}, il lavoro compiuto dal fluido per introdurre nel sistema la massa ΔM_1, che indichiamo con ΔL_1, e il lavoro compiuto dal fluido per estrarre dal sistema la massa ΔM_2, che indichiamo con ΔL_2.
Il lavoro necessario per spingere la massa ΔM_1 all'interno del sistema vale:

$$\Delta L_1 = F_1 \cdot \Delta x \qquad (14)$$

dove Δx è lo spostamento compiuto nel tempo $\Delta\tau$ e F_1 è la forza necessaria per contrastare la pressione, che indichiamo con p_1, esercitata dalla massa ΔM_1 del fluido entrante.

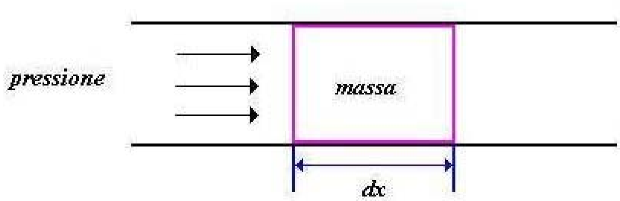

Fig. 4

Supponendo che la sezione si mantenga costante e così pure la pressione, possiamo scrivere:

$$F_1 = p_1 \cdot S_1 \qquad (15)$$

e quindi:

$$\Delta L_1 = p_1 \cdot S_1 \cdot \Delta x \qquad (16)$$

ma:

$$S_1 \cdot \Delta x = \Delta V_1 \qquad (17)$$

e quindi la relazione precedente diventa:

$$\Delta L_1 = p_1 \cdot \Delta V_1 \qquad (18)$$

ricordando che:

$$\Delta V_1 = v_1 \cdot \Delta M_1 \qquad (19)$$

otteniamo:

$$\Delta L_1 = p_1 \cdot v_1 \cdot \Delta M_1 \qquad (20)$$

Analogamente il lavoro necessario per estrarre dal sistema la massa ΔM_2 vale:

$$\Delta L_2 = p_2 \cdot v_2 \cdot \Delta M_2 \qquad (21)$$

Il lavoro ΔL_1, essendo un lavoro d'introduzione di materia, è un lavoro ricevuto dal sistema e quindi, per convenzione, avrà segno negativo nel bilancio di energia, mentre il lavoro ΔL_2, essendo un lavoro di estrazione di materia, è un lavoro emesso dal sistema e quindi, per convenzione, avrà segno positivo nel bilancio di energia.
Allora sostituendo le relazioni dei lavori ΔL_1 e ΔL_2, appena ricavate, con le convenzioni di segno esposte precedentemente, nel bilancio di energia, otteniamo:

$$\begin{aligned}&\Delta M_2 \cdot \left(e_{c2} + e_{p2} + u_2\right) - \Delta M_1 \cdot \left(e_{c1} + e_{p1} + u_1\right) = \\ &= Q_{SA} - L_{SA} - \left(-p_1 \cdot v_1 \cdot \Delta M_1 + p_2 \cdot v_2 \cdot \Delta M_2\right)\end{aligned} \qquad (22)$$

riscriviamo allora la relazione nel seguente modo:

$$\Delta M_2 \cdot \left(e_{c2} + e_{p2} + u_2 + p_2 \cdot v_2\right) - \Delta M_1 \cdot \left(e_{c1} + e_{p1} + u_1 + p_1 \cdot v_1\right) = Q_{SA} + L_{SA} \qquad (23)$$

dividendo ambo i membri per la massa, in quanto $\Delta M_1 = \Delta M_2$ per ipotesi, otteniamo:

$$\left(e_{c2} + e_{p2} + u_2 + p_2 \cdot v_2\right) - \left(e_{c1} + e_{p1} + u_1 + p_1 \cdot v_1\right) = q_{SA} + l_{SA} \qquad (24)$$

ricordando la definizione di entalpia, espressa tramite le grandezze specifiche

$$h = u + p \cdot v \qquad (25)$$

la relazione del bilancio di energia in forma specifica può essere riscritta nel seguente modo:

$$\left(e_{c2} + e_{p2} + h_2\right) - \left(e_{c1} + e_{p1} + h_1\right) = q_{SA} + l_{SA} \qquad (26)$$

Se ora riconsideriamo l’equazione del bilancio di energia (23) e dividiamo ambo i membri per l’intervallo di tempo $\Delta\tau$ otteniamo, ricordando sempre che abbiamo considerato $\Delta M_1 = \Delta M_2 = \Delta M$, che:

$$\dot{M}\left(e_{c2} + e_{p2} + h_2\right) - \dot{M}\left(e_{c1} + e_{p1} + h_1\right) = \dot{Q}_{SA} + \dot{L}_{SA} \qquad (27)$$

dove:

$$\dot{M} = \frac{\Delta M_1}{\Delta\tau} = \frac{\Delta M_2}{\Delta\tau} \qquad (28)$$

$$\dot{Q}_{SA} = \frac{Q_{SA}}{\Delta\tau} \qquad (29)$$

$$\dot{L}_{SA} = \frac{L_{SA}}{\Delta\tau} \qquad (30)$$

La relazione (27) ricavata è equivalente alla relazione (26) precedentemente ricavata, in questo caso però il bilancio di energia del sistema viene espresso tramite la portata.
Per completare il bilancio dell’energia del nostro sistema aperto dobbiamo sostituire le relazioni dell’energia cinetica e dell’energia potenziale, cosi definite:

$$E_c = \frac{1}{2} M \cdot w^2 \qquad (31)$$

$$E_p = M \cdot g \cdot z \qquad (32)$$

per cui le relative grandezze specifiche sono:

$$ec = \frac{1}{2} w^2 \qquad (33)$$

$$e_p = g \cdot z \qquad (34)$$

dove M è la massa, w la velocità, g l'accelerazione di gravità che vale $9.8 \, m/s^2$ e z l'altezza.
Sostituendo queste relazioni nel bilancio dell'energia (26) si ottiene:

$$\left(\frac{1}{2} w_2^{\,2} + g \cdot z_2 + h_2 \right) - \left(\frac{1}{2} w_1^{\,2} + g \cdot z_1 + h_1 \right) = q_{SA} + l_{SA} \qquad (35)$$

che può essere riscritta come:

$$\frac{w_2^{\,2} - w_1^{\,2}}{2} + g \cdot (z_2 - z_1) + h_2 - h_1 = q_{SA} + l_{SA} \qquad (36)$$

Nel caso in cui le variazioni di energia cinetica e di energia potenziale siano trascurabili si ottiene la relazione:

$$h_2 - h_1 = q_{SA} + l_{SA} \qquad (37)$$

Il risultato ottenuto è però affetto da un errore che consiste nell'avere considerato l'energia cinetica di un fluido costante quando in realtà non lo è.

Bilancio di energia di un sistema aperto

La velocità, e quindi l'energia cinetica, di un fluido che scorre in un condotto non è costante in ogni punto ma varia in funzione della sezione che si sta considerando e in funzione della distanza dall'asse del condotto. Ciò si spiega con il fatto che al variare della sezione e al variare della distanza dall'asse del condotto varia il moto del fluido.
I tipi di moto di un fluido all'interno di un condotto sono infiniti e variano tra le condizioni estreme di moto laminare e moto turbolento.

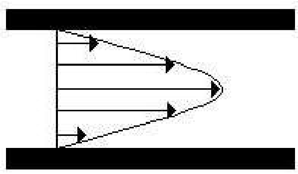

Fig. 5 – Moto laminare

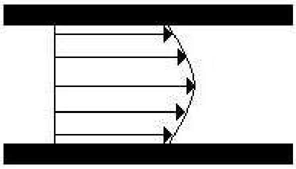

Fig. 6 – Moto turbolento

Per lo studio di questi due moti si consideri il fluido suddiviso in tanti “filetti”: nel caso di moto laminare questi filetti si muovono senza mai intersecarsi, nel caso di moto turbolento, invece, i filetti si mescolano dando luogo a vortici e quindi la velocità varia continuamente e irregolarmente nel tempo.
Come abbiamo già detto, la velocità varia in funzione della sezione, in particolare per il moto laminare varia con legge parabolica del secondo ordine e, per condotti a sezione costante, è sempre diretta parallelamente all'asse del condotto; per il moto turbolento, invece, la velocità è ancora maggiore vicino all’asse e diminuisce andando verso le pareti del condotto, ma il suo profilo, rispetto a quello del moto laminare, è più appiattito.
Per ricavare l’energia cinetica, allora, si fa uso di un opportuno valore medio della velocità, definito come quel valore ipotetico della componente della velocità parallela all’asse che, uniforme su tutta la sezione S, sarebbe in grado di dare la stessa portata in volume che si ha nella realtà.

$$w = \frac{1}{S}\int_S \overline{w}_{loc} \cdot \overline{n} \cdot dS \qquad (38)$$

dove:
$w =$ velocità
$\overline{w}_{loc} =$ vettore con valore locale della velocità
$\overline{n} =$ vettore normale alla sezione

Andando a considerare solo le componenti normali del vettore $\overline{w}_{loc}$ si considerano solo le componenti che fanno entrare o uscire il fluido. Allora la massa, che nell’unità di tempo, attraversa la generica sezione S del conduttore, cioè la portata, è data dalla relazione:

$$\dot{M} = \int_S \rho \cdot \left(\overline{w}_{loc} \cdot \overline{n}\right) \cdot dS \qquad (39)$$

dove ρ è la densità del fluido sulla sezione.
Considerando la densità di massa costante su tutta la sezione, la relazione precedente può essere riscritta come:

$$\dot{M} = \rho \cdot w \cdot S \qquad (40)$$

allora la portata in volume è:

$$\dot{V} = \frac{\dot{M}}{\rho} = w \cdot S \qquad (41)$$

Dalla relazione (40) è allora possibile ricavare l'espressione della velocità media

$$w = \frac{\dot{M}}{\rho \cdot S} \qquad (42)$$

e con questa ricavare l'energia cinetica che il sistema possiede nell'unità di tempo:

$$E_c = \frac{1}{2}\dot{M} \cdot w^2 \qquad (43)$$

Dividendo questa per la massa otteniamo la relazione espressa tramite le grandezze specifiche:

$$e_c = \frac{1}{2}w^2 \qquad (44)$$

In realtà l'energia cinetica posseduta dal fluido è maggiore di quella che abbiamo appena ricavato in quanto il profilo di velocità non è uniforme in modulo.
Si introduce perciò un coefficiente correttivo α ottenendo così:

$$e_c = \frac{1}{2}\alpha \cdot w^2 \qquad (45)$$

dove il fattore α può assumere tutti i valori compresi tra i valori uno e due, in particolare abbiamo $\alpha = 2$ nel caso di moto completamente laminare per il quale, come già detto, la velocità varia nella sezione con legge parabolica di secondo ordine e il profilo assunto prende il nome di **profilo parabolico** o **di Poiseuille**, tipico delle sostanze oleose, e abbiamo $\alpha = 1$ nel caso di moto così turbolento da poter considerare il profilo di velocità piatto.
Alla luce di queste considerazioni la relazione (59) può essere riscritta in questo modo:

$$\left(\frac{\alpha}{2}w_2{}^2 + g \cdot z_2 + h_2\right) - \left(\frac{\alpha}{2}w_1{}^2 + g \cdot z_1 + h_1\right) = q_{SA} + l_{SA} \qquad (46)$$

da cui:

$$\frac{\alpha}{2}\left(w_2{}^2 - w_1{}^2\right) + g \cdot \left(z_2 - z_1\right) + h_2 - h_1 = q_{SA} + l_{SA} \qquad (47)$$

Bilancio di massa di un sistema aperto

Nello studio da noi condotto abbiamo supposto che il sistema sia stazionario e quindi che la massa si mantenga costante nel tempo, implicando che la quantità di massa che entra nel sistema sia uguale alla massa che esce; va sottolineato che la quantità di massa si mantiene costante ma non sarà più costituita dalle stesse molecole come accadeva nei sistemi chiusi.
In generale però, come già detto, in un sistema aperto abbiamo sia una variazione d'energia che una variazione di massa, che implica una quantità di massa entrante diversa da quella uscente.
In questo caso occorre trovare il bilancio di massa in modo analogo a quanto fatto per quello d'energia, in quanto le considerazioni riferite al sistema sono le stesse.

Indichiamo con $M_{SA\tau_0}$ la massa nel volume del sistema all'istante iniziale e con $M_{SA\tau_0+\Delta\tau}$ la massa nel volume del sistema all'istante finale.
Così come per l'energia, per calcolare il bilancio di massa, utilizziamo il sistema chiuso ausiliario che all'istante $\tau = \tau_0$ avrà una massa pari alla somma della massa contenuta nel volume del sistema $M_{SA\tau_0}$ e della massa pronta ad entrare ΔM_1, mentre all'istante $\tau = \tau_0 + \Delta\tau$ avrà una massa pari alla somma della massa contenuta nel volume del sistema $M_{SA\tau_0+\Delta\tau}$ e della massa uscente ΔM_2.
Scriviamo allora il bilancio della massa riferito al sistema ausiliario chiuso che in quanto tale ha mantenuto costante la sua massa al trascorrere del tempo.

$$M_{SA\tau_0} + \Delta M_1 = M_{SA\tau_0+\Delta\tau} + \Delta M_2 \qquad (81)$$

Questa la possiamo riscrivere come:

$$M_{SA\tau_0+\Delta\tau} - M_{SA\tau_0} = \Delta M_1 - \Delta M_2 \qquad (82)$$

dividendo ambo i membri per l'intervallo di tempo $\Delta\tau$ otteniamo:

$$\frac{M_{SA\tau_0+\Delta\tau} - M_{SA\tau_0}}{\Delta\tau} = \frac{\Delta M_1 - \Delta M_2}{\Delta\tau} \qquad (83)$$

Il primo membro della relazione rappresenta il rapporto incrementale, quindi passando al limite per $\Delta\tau \to 0$, per la definizione di derivata, si ottiene:

$$\frac{dM_{SA}}{d\tau} = \dot{M}_1 - \dot{M}_2 \qquad (84)$$

dove:

$\dot{M}_1 = \dfrac{\Delta M_1}{\Delta\tau} =$ PORTATA DI MASSA RIFERITA A S_1 (85)

$\dot{M}_2 = \dfrac{\Delta M_2}{\Delta\tau} =$ PORTATA DI MASSA RIFERITA A S_2 (86)

Allora $\dfrac{dM_{SA}}{d\tau}$ rappresenta la variazione di massa del sistema aperto, mentre la portata di massa $\dot{M}_1$ e $\dot{M}_2$ rappresentano rispettivamente la massa che entra nella sezione S_1 e nella sezione S_2 nell'unità di tempo.
In generale nel caso in cui il sistema abbia più sezioni d'ingresso e più sezioni d'uscita scriveremo:

$$\frac{dM_{SA}}{d\tau} = \sum_i \dot{M}_i \qquad (87)$$

dove le portate di massa delle sezioni d'ingresso si sommano mentre quelle delle sezioni d'uscita si sottraggono. Siccome all'interno di un sistema non avvengono reazioni chimiche ogni specie chimica presente può essere descritta con una relazione di questo tipo.

Passiamo all'analisi degli scambi di lavoro. Poiché le pareti laterali sono rigide ed indeformabili, normalmente si fa entrare ed uscire lavoro dal sistema tramite alberi rotanti. Poniamo allora il lavoro scambiato attraverso le pareti laterali uguale ad un generico contributo di lavoro meccanico dL.
Il lavoro $L_{sezioni}$ è uguale al lavoro, compiuto dal fluido che si trova a monte e a valle del sistema chiuso, per introdurre nel sistema aperto la massa dM_1 e per estrarre dallo stesso la massa dM_2. Esso si calcola nel modo seguente.

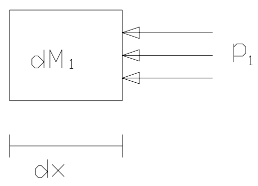

Fig. 7

Il lavoro necessario per spingere nel sistema aperto la massa dM_1 è uguale a

$$|dL_1| = F \cdot dx \qquad (88)$$

dove dx è lo spostamento fatto nel tempo dτ e F è la forza necessaria per contrastare la pressione, che chiamiamo P_1, esercitata sulla massa dM_1 dal fluido che si trova dentro al sistema aperto. Quindi se S è l'area della sezione

$$F = P_1 \cdot S \qquad (89)$$

E

$$|dL_1| = P_1 S dx \qquad (90)$$

Ma $S \cdot dx = dV$ e $dV = v \cdot dM_1$, quindi considerando i valori specifici otteniamo

$$|dl_1| = p_1 v_1 dM_1 \qquad (91)$$

Questo è un lavoro di introduzione e viene ricevuto dal sistema quindi quando lo sostituiremo nell'equazione del bilancio dovremo considerarlo con segno negativo.
Analogamente possiamo calcolare il lavoro compiuto (darà quindi un contributo positivo) dal fluido del sistema aperto sulla massa dM_2.

$$dl_2 = p_2 v_2 dM_2 \qquad (92)$$

Sostituendo abbiamo

$$E_{sc,\tau_0+d\tau} - E_{sc,\tau_0} = dQ_{laterale} - dL - \left(-p_1 v_1 dM_1 + p_2 v_2 dM_2\right) \qquad (93)$$

Utilizzando le espressioni viste nei capitoli precedenti otteniamo (94)

$$dM_2\left(u_2 + e_{p2} + e_{c2} + p_2 v_2\right) - dM_1\left(u_1 + e_{p1} + e_{c1} + p_1 v_1\right) + \left[\int_V \rho e dV\right]_{\tau_0 + d\tau} - \left[\int_V \rho e dV\right]_{\tau_0} =$$

$$= dQ_{laterale} - dL$$

Se dividiamo entrambi i membri per **dτ** e utilizziamo l'espressione dell'entalpia otteniamo l'equazione finale di bilancio dell'energia per unità di tempo (è quindi più propriamente un bilancio di potenze) per il sistema aperto

$$\dot{M}_2\left[h_2 + \frac{\alpha_2 W_2^{\ 2}}{2} + gz_2\right] - \dot{M}_1\left[h_1 + \frac{\alpha_1 W_1^{\ 2}}{2} + gz_1\right] + \int_V \frac{d}{d\tau}[\rho e] dV = \dot{Q}_{lat} - \dot{L} \qquad (95)$$

Questa equazione vale nel caso generico di regime transitorio. Supponendo invece che il sistema sia in regime stazionario abbiamo che l'integrale si annulla e che, per l'equazione di bilancio della massa , $\dot{M}_1 = \dot{M}_2 = \dot{M}$. Dividendo allora entrambi i membri della (95) per $\dot{M}$ otteniamo l'equazione di bilancio dell'energia nella sua forma canonica

$$\alpha_2 \frac{W_2^{\ 2}}{2} - \alpha_1 \frac{W_1^{\ 2}}{2} + \left(z_2 - z_1\right) g + \left(h_2 - h_1\right) = q - l \qquad (96)$$