1 Flusso interno

Un flusso interno è caratterizzato dall'essere confinato da una superficie. Questo fa sì che lo sviluppo dello strato limite finisca per essere vincolato dalle condizioni geometriche. La configurazione di flusso interno rappresenta una soluzione conveniente per quel che riguarda il riscaldamento e raffreddamento di un liquido usato in processi chimici, controlli ambientali e tecnologie di conversione dell'energia.

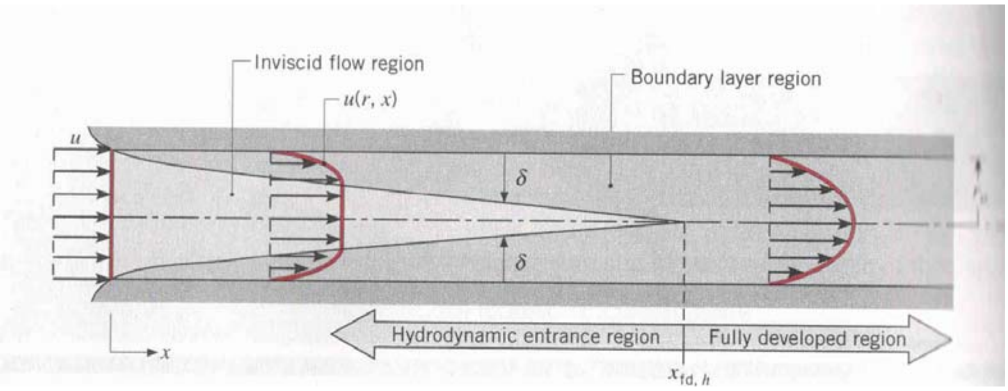

Illustrazione 1: Sviluppo dello strato limite idrodinamico in un flusso laminare interno a un tubo circolare

Nel moto di flusso interno oltre alle considerazioni di moto laminare o turbolento è importante considerare l'esistenza di una zona d'ingresso idrodinamico e una zona di moto completamente sviluppato. Parlando di moto di flusso interno è importante conoscere la lunghezza della regione d'ingresso idrodinamico, che cambia se il flusso è laminare o turbolento.
Nel caso di flusso in un tubo circolare, come mostrato in figura 1, il numero di Reynolds è definito come:

$$Re_D = \frac{\rho \cdot u_m \cdot D}{\mu} = \frac{u_m \cdot D}{\nu} \qquad (1)$$

Dove u_m è la velocità media attraverso la sezione del tubo. In un flusso completamente sviluppato il numero di Reynolds per il transito tra zona laminare e turbolenta è $Re_{D,c} \simeq 2300$ anche se per ottenere un moto completamente turbolento è necessario un numero di Reynolds molto maggiore $Re_D \simeq 10000$.

Per moto laminare ($Re_D \lesssim 2300$) la lunghezza della zona d'ingresso idrodinamica può essere definita come:

$$\left(\frac{x_{f\,d,h}}{D}\right) \approx 0{,}5 Re_D \qquad (2)$$

Questa equazione considera una zona d'ingresso come quella indicata in figura 1 e quindi che la velocità all'ingresso sia fondamentalmente uniforme.

Per quel che riguarda il moto turbolento non è disponibile un'equazione generale soddisfacente, tuttavia quello che sappiamo è che la lunghezza della regione d'ingresso è indipendente dal numero di Reynolds e all'incirca:

$$10 \leq \left(\frac{x_{f\,d,h}}{D}\right)_{Turb.} \leq 60 \qquad (3)$$

per cui generalmente si fa riferimento a moto turbolento ipotizzando $(x/D) > 10$.

La velocità media di un flusso interno viene definita come la velocità che moltiplicata per ρ e per la sezione del tubo A_c fornisce la stessa portata in massa:

$$\dot{m} = \rho \cdot u_m \cdot A_C \qquad (4)$$

Caratteristica importante del comportamento idrodinamico di un flusso in condotto circolare è che la componente radiale della velocità e la variazione della velocità nel tempo sono nulle.

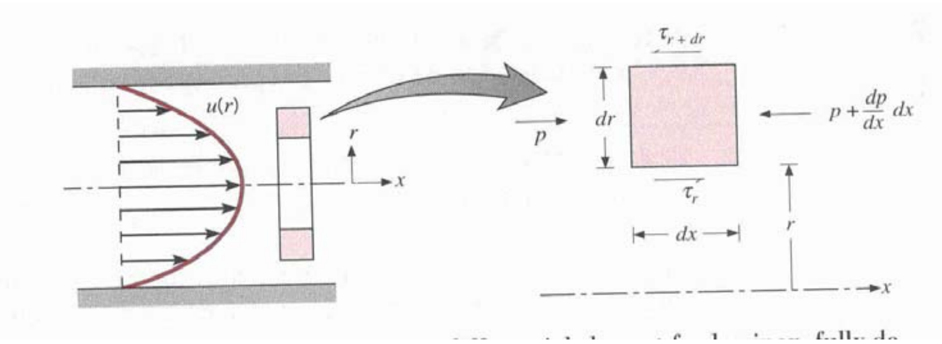

Illustrazione 2: Bilancio di forze su un elemento infinitesimo per moto laminare

Risolvendo il bilancio delle forze sull'elementino di liquido di figura 2 si ottiene:

$$\tau_r(2\cdot\pi\cdot r\cdot dx) + p(2\cdot\pi\cdot r\cdot dr) - \left\{\tau_r(2\cdot\pi\cdot r\cdot dx) + \frac{d}{dr}[\tau_r(2\cdot\pi\cdot r\cdot dx)dr]\right\} - \left\{\tau_r(2\cdot\pi\cdot r\cdot dr) + \frac{d}{dr}[\tau_r(2\cdot\pi\cdot r\cdot dr)dx]\right\} = 0 \qquad (5)$$

Che si riduce a:

$$-\frac{d}{dr}(r\cdot\tau_r) = r\frac{dp}{dx} \qquad (6)$$

Sostituendo la legge di Newton $\left(\tau_r = -\mu\frac{du}{dr}\right)$ nell'equazione precedente si ottiene:

$$\frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}r\left(\frac{du}{dr}\right)=\frac{dp}{dx} \qquad (7)$$

Dal momento che la pressione è indipendente da r è possibile integrare due volte per ottenere l’espressione della velocità:

$$u(r)=\frac{1}{\mu}\left(\frac{dp}{dx}\right)\frac{r^2}{4}+C_1\ln(r)+C_2 \qquad (8)$$

Le costanti possono essere ottenute imponendo le condizioni al contorno $u(r_0)=0$ e $\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=0}=0$:

$$u(r)=-\frac{1}{4\cdot\mu}\left(\frac{dp}{dx}\right)r_0^2\left[1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right] \qquad (9)$$

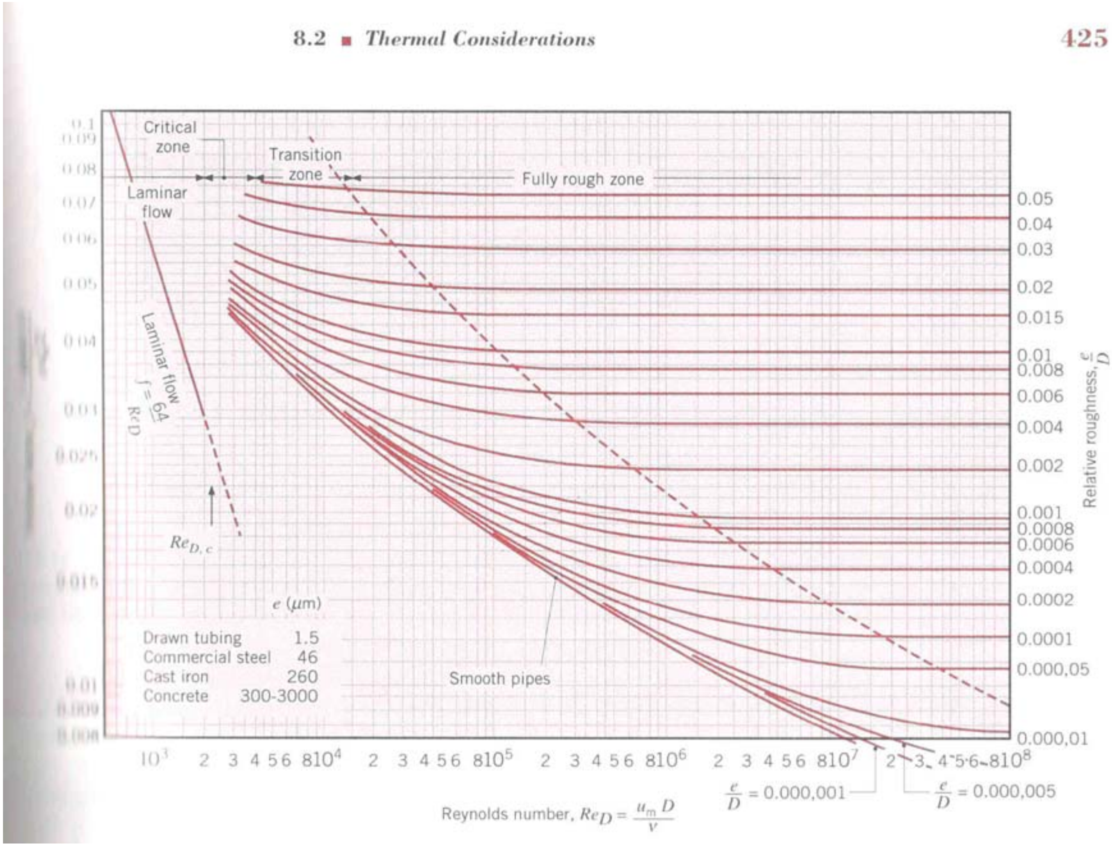

Illustrazione 3: Fattore d’attrito per moto laminare completamente sviluppato in un tubo circolare

Dalla 9 si deduce che il profilo di velocità è parabolico e che il gradiente di pressione è sempre negativo. Sostituendo la 9 nella formula per la velocità media e integrando due volte si ottiene:

$$u_m=-\frac{r_0^2}{8\mu}\frac{dp}{dx} \qquad (10)$$

Sostituendo la 10 nella 9 si ottiene:

$$\frac{u(r)}{u_m}=2\left[1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right] \qquad (11)$$

Essendo u_m ricavabile dalla portata in massa si può utilizzare la 10 per ottenere il gradiente di pressione.
Con lo scopo di trovare le cadute di pressione si fa spesso uso in ingegneria del fattore d’attrito di Moody:

$$f = \frac{-\left(\frac{dp}{dx}\right)D}{\frac{\rho \cdot u_m^2}{2}} \qquad (12)$$

laminar flow in tubes of differing cross section

Cross Section	$\frac{b}{a}$	$Nu_D \equiv \frac{hD_h}{k}$ (Uniform q_s'')	$Nu_D \equiv \frac{hD_h}{k}$ (Uniform T_s)	$f\,Re_{D_h}$
	—	4.36	3.66	64
a, b	1.0	3.61	2.98	57
a, b	1.43	3.73	3.08	59
a, b	2.0	4.12	3.39	62
a, b	3.0	4.79	3.96	69
a, b	4.0	5.33	4.44	73
a, b	8.0	6.49	5.60	82
	∞	8.23	7.54	96
	—	3.11	2.47	53

Used with permission from W. M. Kays and M. E. Crawford, *Convection Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill, New York, 1980.

Illustrazione 4: Numeri di Nusselt e fattori d’attrito per tubi di diversa sezione in moto laminare

Si definisce invece il coefficiente d’attrito nel seguente modo:

$$C_f = \frac{\tau_s}{\frac{\rho \cdot u_m^2}{2}} \qquad (13)$$

Siccome $\tau_s = -\mu\left(\frac{du}{dr}\right)_{r=r_0}$ sostituendo l’espressione 9 e derivando si ottiene:

$$C_f = \frac{f}{4} \qquad (14)$$

Sostituendo la 1 e la 10 nella 12 si ottiene:

$$f = \frac{64}{Re_D} \qquad (15)$$

Per moto completamente sviluppato in regime turbolento e tubi lisci si può esprimere *f* come:

$$f = 0{,}184 \cdot Re_D^{-\frac{1}{5}} \;;\; Re_D \geq 2 \cdot 10^4 \qquad (16)$$

1.1 Analisi termica

In analogia con le considerazioni fluidodinamiche, il flusso interno è caratterizzato da una zona d'ingresso termico e dalla formazione di uno strato limite termico. Inoltre se le condizioni alla superficie del tubo impongono una temperatura costante o un flusso di calore costante a una certa d'istanza dall'ingresso del tubo si avrà la condizione di flusso completamente sviluppato termicamente.
Si definisce temperatura media del flusso in una sezione qualsiasi l'energia trasportata dal flusso attraverso la sezione stessa. La quantità di energia trasportata si ottiene integrando il prodotto della massa di flusso (ρu) e l'energia interna per unità di massa attraverso la sezione ($c_v T$):

$$E_t = \int_{A_c} \rho \cdot u \cdot c_v \cdot T \cdot dA_C \qquad (17)$$

Da cui se si definisce la temperatura media come:

$$E_t = \dot{m} \cdot c_v \cdot T_m \qquad (18)$$

Da cui:

$$T_m = \frac{\int_{A_c} \rho \cdot u \cdot c_v \cdot T \cdot dA_C}{\dot{m} \cdot c_v} \qquad (19)$$

Per fluidi incomprimibili in un tubo circolare con c_V si ottiene:

$$T_m = \frac{2}{u_m \cdot r_0^2} \int_0^{r_0} u \cdot T \cdot r \cdot dr \qquad (20)$$

$$q_S = h \cdot (T_p - T_m) \qquad (21)$$

Dove *h* è il coefficiente locale di convezione per il trasferimento di calore. Questa formula è in analogia con la legge del raffreddamento per il flusso libero ma c'è una sostanziale differenza tra T_∞ e T_m in quanto T_m non è costante ma varia nella direzione delle diverse sezioni.

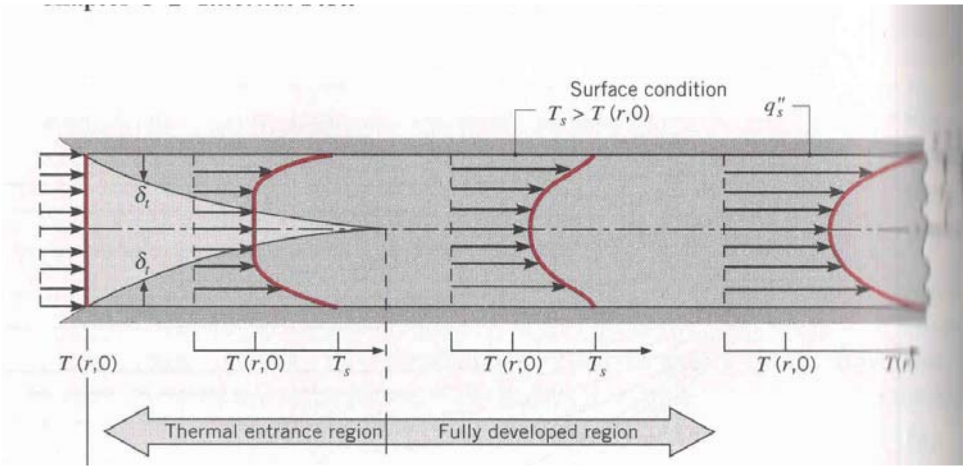

Illustrazione 5: Strato limite termico in flusso riscaldato in tubo circolare

Siccome il flusso interno è completamente racchiuso in una superficie è possibile applicare il bilancio dell'energia per determinare come la temperatura media varia lungo la direzione longitudinale del tubo e per correlare la differenza di temperatura tra l'inizio del tubo e la fine con il il calore locale scambiato per convezione. Con riferimento alla figura 6 per un fluido ideale si può scrivere:

$$q_{conv} = m \cdot c_p \cdot dT_m \qquad (22)$$

che con buona approssimazione è valida per fluidi incomprimibili.
In rapporto all'intera lunghezza del tubo è:

$$q_{conv} = m \cdot c_p \cdot (T_{m,0} - T_{m,t}) \qquad (23)$$

Dove q_{conv} è il calore scambiato per la lunghezza totale del tubo.

1.2 Apporto costante di flusso di calore lungo la superficie della tubazione

Per flusso di calore scambiato costante lungo l'intera superficie si tratta solo di determinare lo scambio termico totale per cui vale:

$$q_{conv.} = q_S(P \cdot L) \qquad (24)$$

Dove q_S è indipendente da e $P = \pi \cdot D$. Combinando la 24 e la 23 è possibile determinare le temperature medie all'inizio e alla fine del tubo.
Considerando un elementino infinitesimo di fluido, come mostrato in figura 6, si può scrivere:

$$dq_{conv.} = q_S \cdot P \cdot dx \qquad (25)$$

Da cui sostituendo all'interno l'espressione 22 e 21 si ha:

$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{q_S \cdot P}{m \cdot c_p} = \frac{P}{m \cdot c_p} h(T_p - T_m) \qquad (26)$$

Integrando tale espressione tra 0 e la generica coordinata x si ottiene:

$$T_m(x) = T_{m,i} + \frac{q_S \cdot P}{m \cdot c_p} \cdot x \qquad (27)$$

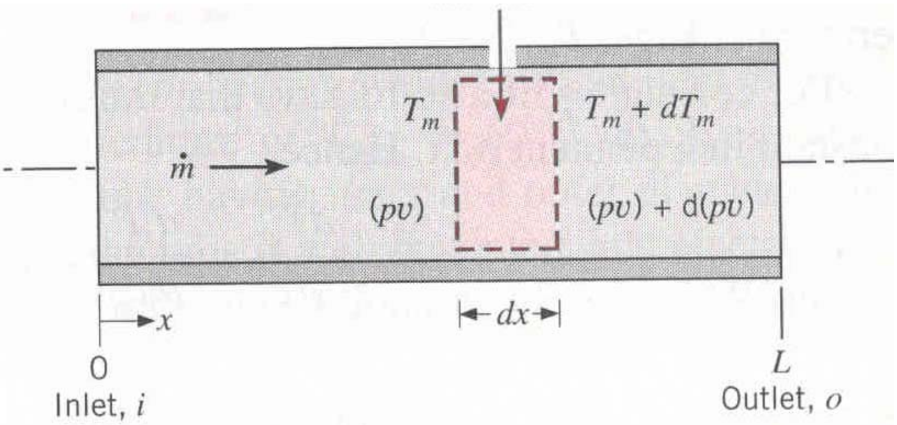

Illustrazione 6: Volume di controllo per moto interno a un tubo

In accordo con la 21 la temperatura media varia linearmente mentre (T_s - T_m) varia lungo x come mostrato in figura 7.

1.3 Apporto costante di temperatura lungo la superficie della tubatura

Definendo ΔT come (T_p - T_m) l'equazione 26 può essere espressa come:

$$\frac{dT_m}{dx} = -\frac{P}{m \cdot c_p} h \cdot \Delta T \qquad (28)$$

Separando le variabili e integrando tra l'inizio e una generica posizione x si ottiene:

$$\int_{\Delta T_i}^{\Delta T_o} \frac{d(\Delta T)}{\Delta T} = -\frac{P}{m \cdot c_p} \int_0^x h \cdot dx \qquad (29)$$

$$\ln\left(\frac{\Delta T_o}{\Delta T_i}\right) = -\frac{P \cdot L}{m \cdot c_p} \overline{h_L} \int_0^x dx \qquad (30)$$

$$\ln\left(\frac{\Delta T_o}{\Delta T_i}\right) = -\frac{P \cdot x}{m \cdot c_p} \overline{h_L} \qquad (31)$$

dove h_L è il valore media di h lungo il tubo. Riordinando:

$$\frac{\Delta T_o}{\Delta T_i} = \frac{T_p - T_{m(x)}}{T_p - T_{m,i}} = e^{-\frac{P \cdot x}{m \cdot c_p} \overline{h_L}} \qquad (32)$$

$$T_{m(x)} = T_p + (T_{m,i} - T_p) \cdot e^{-\frac{P \cdot x}{m \cdot c_p} \overline{h_L}} \qquad (33)$$

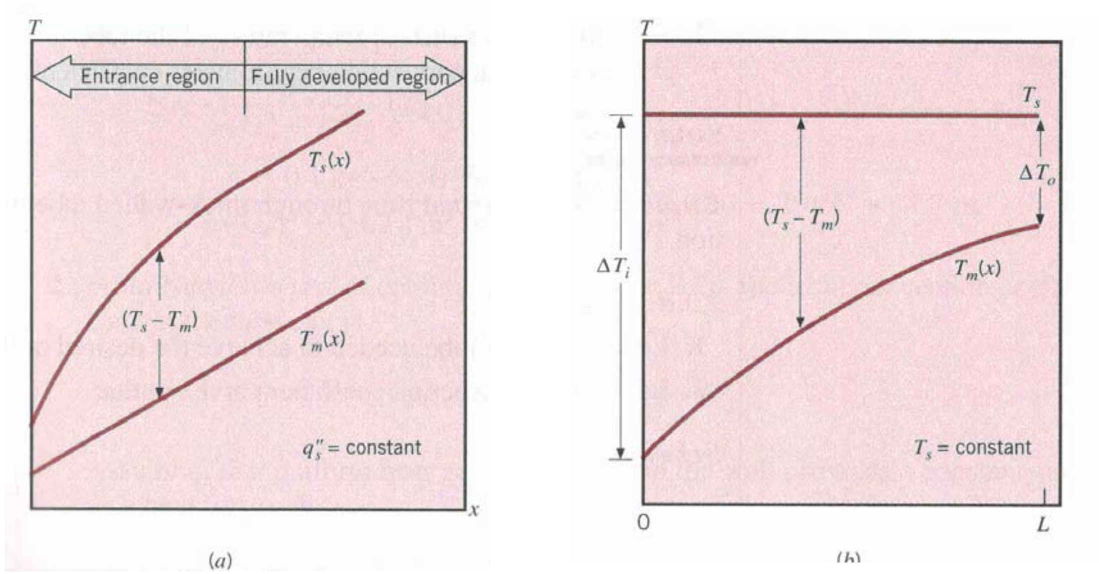

Illustrazione 7 e 8: Variazioni di temperatura assiale per flusso di calore trasferito a un tubo nel caso di flusso di calore costante sulla superficie e variazioni di temperatura assiale per flusso di calore trasferito a un tubo nel caso di temperatura costante sulla superficie

Nel caso in cui la zona di ingresso dinamico della velocità e della temperatura sia simultanea è possibile sfruttare la relazione di Sieder e Tate:

$$Nu = 1{,}86\left(\frac{Re \cdot Pr}{\frac{L}{D}}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\mu}{\mu_p}\right)^{0{,}14} \qquad (34)$$

Valida se:

$0{,}48 < Pr < 16700$

$0{,}0044 < \frac{\mu}{\mu_p} < 9{,}75$

Nel caso di moto completamente sviluppato (idrodinamicamente e termicamente) e per tubi lisci l’espressione precedente si modifica con l’analogia di Chilton-Colburn:

$$Nu = 0{,}023 \cdot Re^{0{,}8} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \qquad (35)$$

Un’espressione preferibile alla precedente è l’equazione di Dittus-Boelter:

$$Nu = 0{,}023 \cdot Re^{0{,}8} \cdot Pr^{m} \qquad (36)$$

dove ***m*** **= 0.4** per un tubo scaldato e ***m*** **= 0.3** per un tubo raffreddato.
I parametri in queste equazioni sono stati calcolati con la media delle temperature tra l’ingresso e l’uscita e sono state confermate sperimentalmente se rispettano le seguenti condizioni:

$0{,}7 < Pr < 160$

$Re > 10000$

1.4 Esercizio: scambio termico a temperatura costante in una tubazione liscia contenente acqua

Una tubazione metallica, in cui scorre acqua, viene mantenuta a temperatura costante mediante delle resistenze elettriche poste sulla superficie esterna.
Si vuole determinare la potenza che tali resistenze elettriche devono erogare e la temperatura della superficie interna del tubo all'uscita. Si ipotizza tubo liscio.
Le caratteristiche della tubazione sono le seguenti:

- L = 5 m
- D = 0,03 m
- T_i = 15 °C
- T_u = 65 °C
- $\dot{Q}_{H_2O} = 10 \frac{l}{min} = 1{,}66 \cdot 10^{-4} \frac{m^3}{s}$

Svolgimento:

$$T_m = \frac{T_i + T_u}{2} = 40\ °C$$

$$\rho(T_m) = 994{,}6 \frac{kg}{m^3}$$

$$\lambda(T_m) = 0{,}628 \frac{W}{m \cdot °C}$$

$$\nu(T_m) = 0{,}638 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$$

$$c_p(T_m) = 4178 \frac{J}{kg \cdot °C}$$

$$\Pr(H_2O) = 4{,}3$$

$$A_t = \frac{\pi \cdot D^2}{4} = 7{,}069 \cdot 10^{-4}\ m^2$$

$$A_l = \pi \cdot D \cdot L = 0{,}471\ m^2$$

$$\dot{m}_{H_2O} = \rho \cdot \dot{Q}_{H_2O} = 0{,}1658 \frac{kg}{s}$$

$$\dot{Q} = \dot{m} \cdot c_p (T_u - T_i) = 34{,}6\ kW$$

$$\dot{q}_p = h(T_p - T_m) \rightarrow T_p = T_m + \frac{\dot{q}_p}{h}$$

$$\dot{q}_p = \frac{\dot{Q}}{A_l} = 73{,}46 \frac{kW}{m^2}$$

$$w_m = \frac{\dot{Q}}{A_l} = 0{,}236 \frac{m}{s}$$

$$Re = \frac{w_m \cdot D}{\nu} = 10760 \rightarrow$$ moto turbolento perché > 10^5

$$Nu = 0{,}023 \cdot Re^{0{,}8} \cdot Pr^{0{,}4} = 96{,}5$$

$$h = \frac{\lambda \cdot Nu}{D} = 1455 \frac{W}{m^2 \cdot °C}$$

$$T_p = T_m + \frac{\dot{q}_p}{h} = 115\ °C$$