

IRRAGGIAMENTO: APPLICAZIONI ED ESERCIZI

Qualunque corpo che si trovi ad una data temperatura T emette un certo quantitativo di energia E per irraggiamento, scambia cioè calore senza essere necessariamente a contatto con un altro corpo. Vi sono poi corpi che hanno una capacità estremamente alta di assorbimento di energia: i corpi neri. Sono corpi cavi nei quali entra energia che però viene totalmente assorbita; un esempio potrebbe essere quello di una caverna nella quale entrano raggi di luce ma che rimane nera alla vista perchè vengono totalmente assorbiti.

I corpi neri in realtà non esistono, esistono però quelli *grigi*, che hanno coefficiente di assorbimento costante e che ubbidiscono alle leggi di *Lambert* con una a davanti. Per fare un esempio, il corpo umano è un corpo grigio, con una a (coeff. di assorbimento) = 0,8.

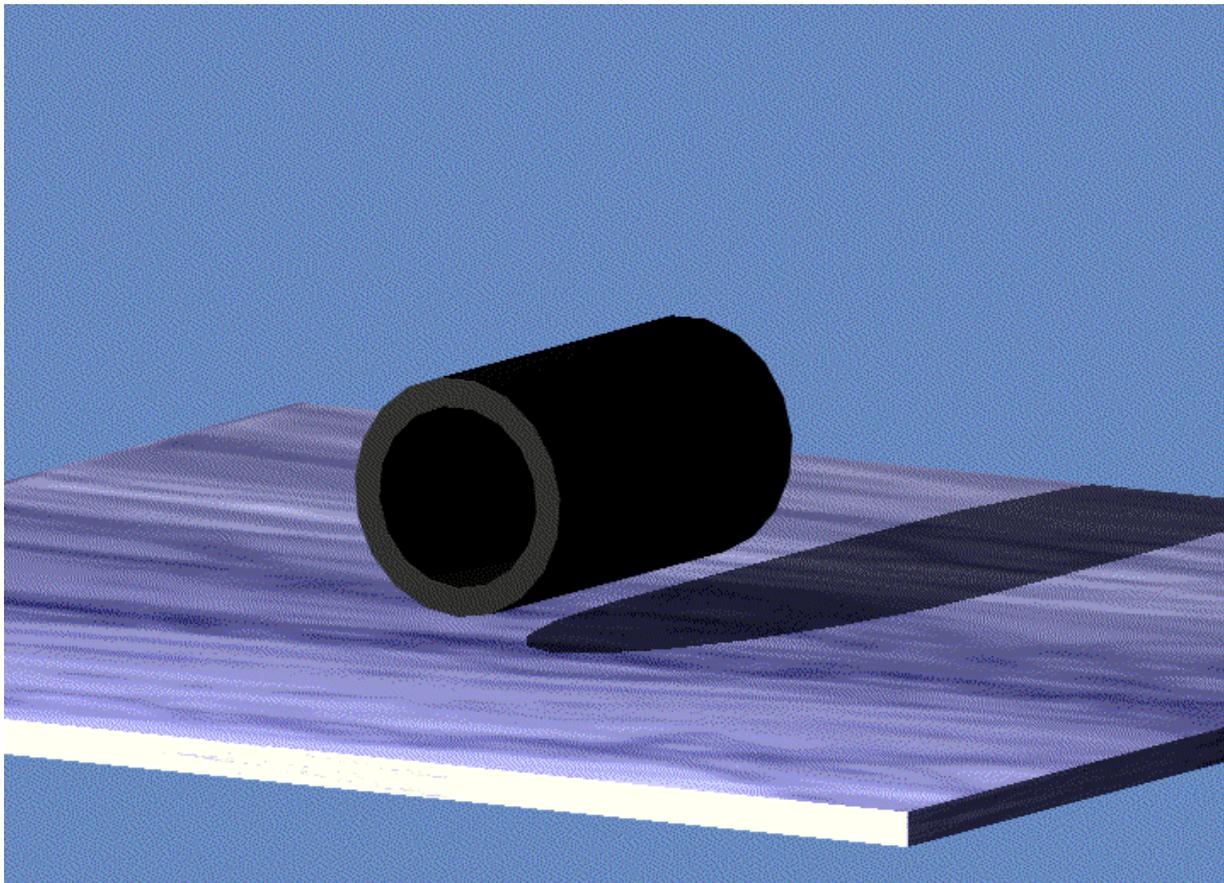


Figura 1: un esempio di corpo nero

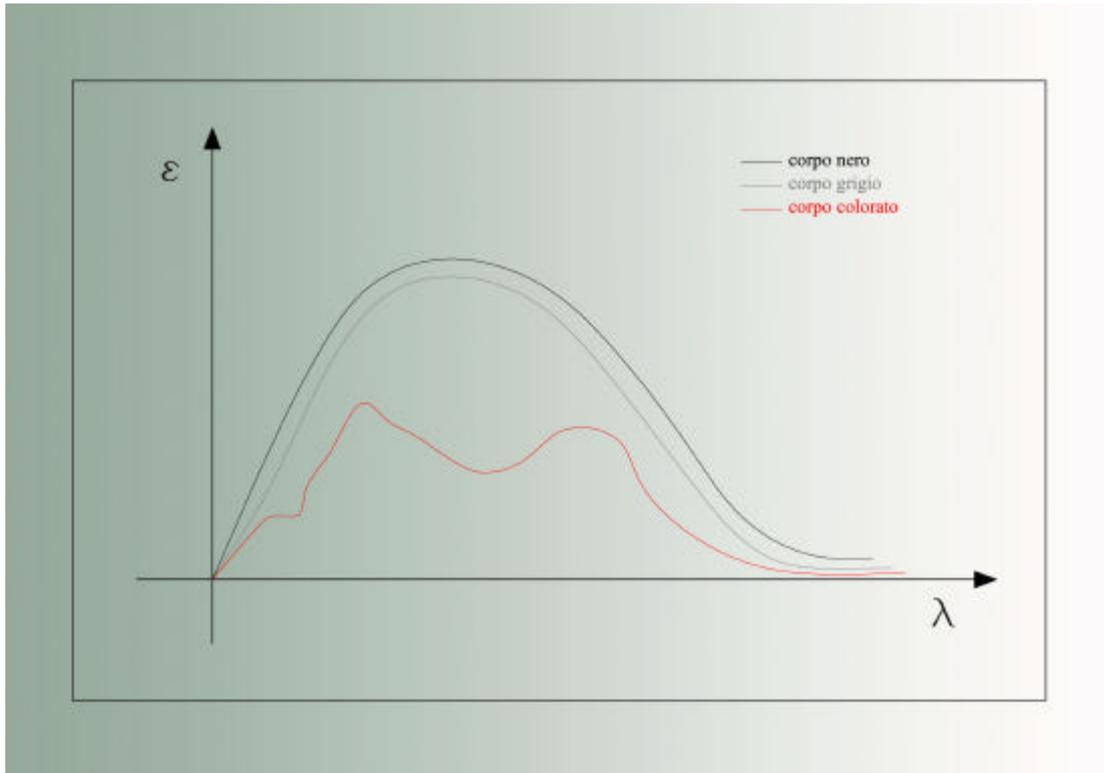


Figura 2: nel grafico è rappresentato l'andamento dell'assorbimento di un corpo nero, di uno grigio e di uno colorato.

Esercizio (due lastre di metallo con il vuoto in mezzo):

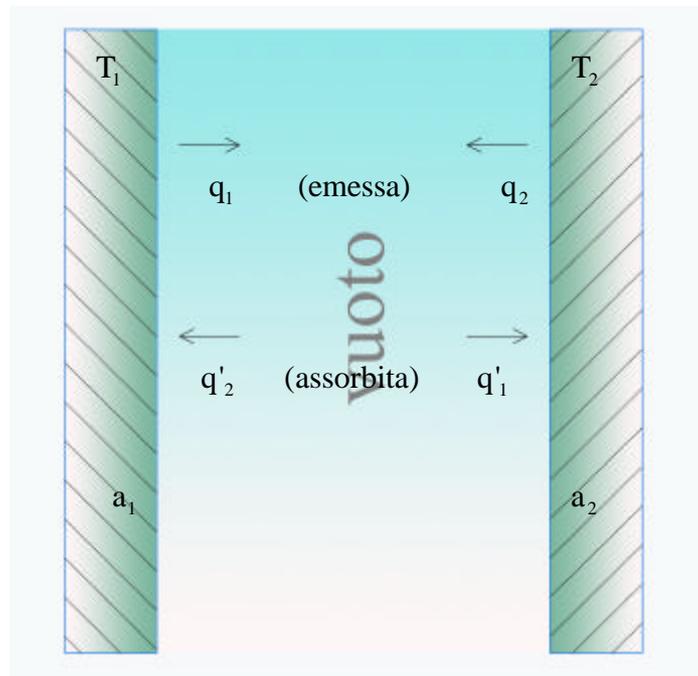


Figura 3: le due lastre con in mezzo il vuoto.

con

T_1 = temperatura del corpo 1

T_2 = temperatura del corpo 2

a_1 = coefficiente di assorbimento del corpo1 (costante tipica del corpo)

a_2 = coefficiente di assorbimento del corpo2 (costante tipica del corpo)

q_1 = potenza emessa dal corpo 1

q_2 = potenza emessa dal corpo 1

q'_1 = potenza che piove sul corpo 2 dal corpo 1

q'_2 = potenza che piove sul corpo 1 dal corpo 2

$$\begin{cases} q'_1 = q_1 + (1 - a_1) \cdot q'_2 \\ q'_2 = q_2 + (1 - a_2) \cdot q'_1 \end{cases} \quad (1)$$

In quest'equazione una contiene l'altra, è un cane che si morde la coda. Per la legge di Stefan-Boltzman si ha:

$$q_1 = a_1 \cdot \sigma_0 \cdot T_1^4$$

$$q_2 = a_2 \cdot \sigma_0 \cdot T_2^4$$

Risolvendo algebricamente la (1)

$$\begin{cases} q'_1 = \frac{q_1 + (1 - a_1) \cdot q_2}{1 - (1 - a_2) \cdot (1 - a_1)} \\ q'_2 = \frac{q_2 + (1 - a_2) \cdot q_1}{1 - (1 - a_1) \cdot (1 - a_2)} \end{cases} \quad (2)$$

Applicando Prevost (la quantità di calore scambiata è pari a quella emessa meno quella ricevuta):

$$q_s = q_1 - a_1 \cdot q'_2$$

$$q_s = \frac{a_2 \cdot q_1 - a_1 \cdot q_2}{a_1 + a_2 - a_1 \cdot a_2} =$$

$$= \sigma_0 \frac{T_1^4 - T_2^4}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - 1} \quad (3)$$

Le temperature sono espresse in gradi Kelvin perché sono elevate alla quarta potenza.

Esempio numerico:

$$\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

$$Q_s = S \cdot q_s \quad \text{con } S = 10 \text{ m}^2$$

$$a_1 = 0,5 \quad a_2 = 0,8$$

$$T_1 = 100 \text{ }^\circ\text{C} \quad T_2 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$q_s = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{(373^4 - 273^4)}{\frac{1}{0,5} + \frac{1}{0,8} - 1} = 347,8 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad (\text{potenza scambiata})$$

$$\dot{Q}_s = S \cdot q_s = 10 \cdot 347,8 = 3478 \text{ W}$$

A livello fisico lo schema di irraggiamento non è riconducibile, come altri fenomeni termici, a quello delle resistenze elettriche; in pratica però sì. Per meglio spiegare questo passiamo ad un esempio pratico, due muri di mattoni intonacati con in mezzo un'intercapedine d'aria:

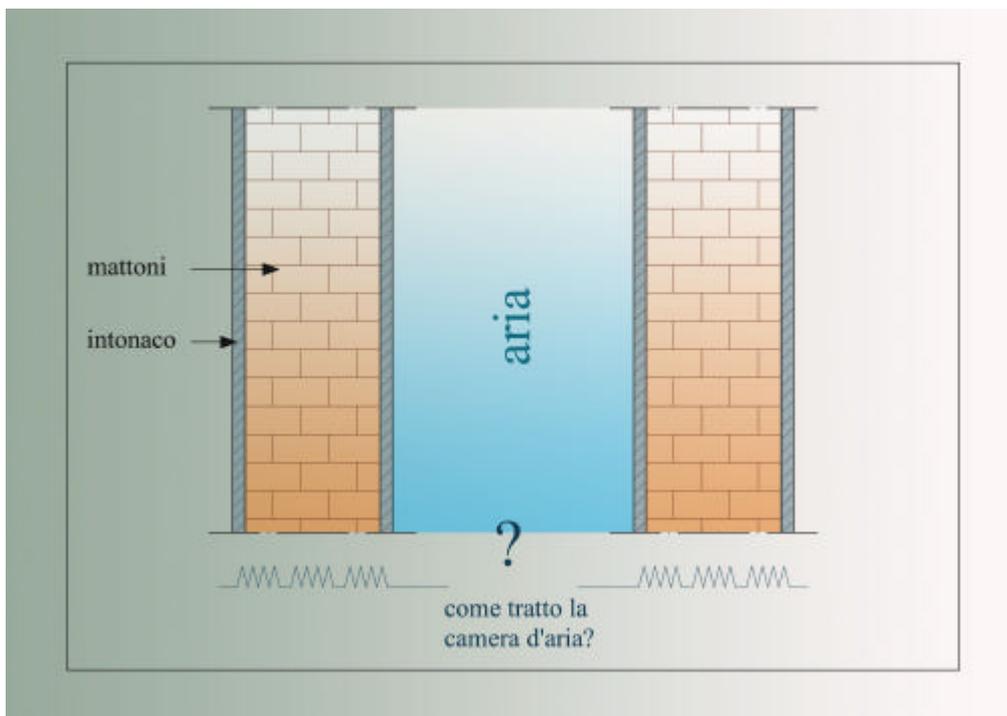


Figura 4: schematizzazione del muro con l'aria.

Nell'immagine è rappresentato anche uno schema di resistenze che serve per meglio visualizzare il problema. Non si sa però come trattare la camera d'aria che presenta, oltre l'irraggiamento, anche moti convettivi. Ecco allora che lo schema si può completare introducendo due resistenze in parallelo nella camera d'aria che rappresentano i due fenomeni citati qualche riga sopra.

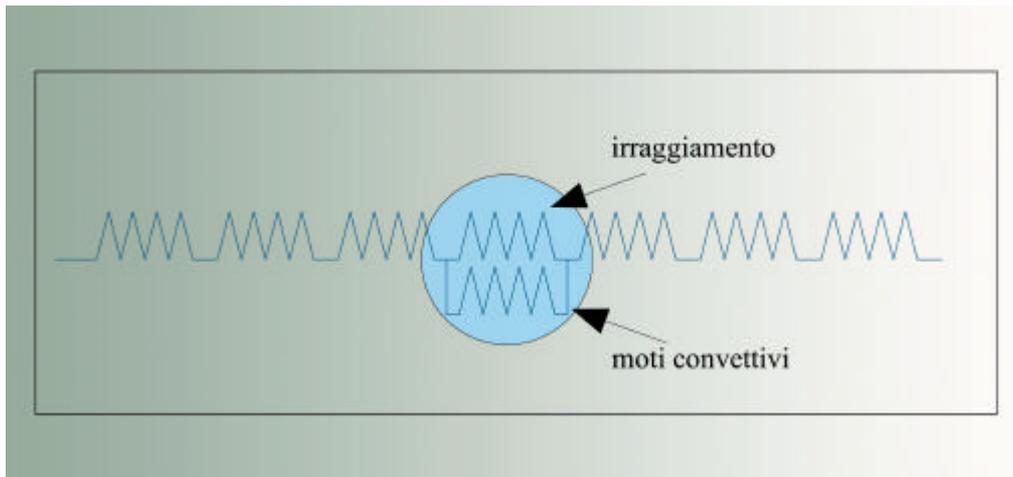


Figura 5: schematizzazione della resistenza con l'irraggiamento e i moti convettivi messi in parallelo.

$$R_{\text{irr}} = \frac{100}{3478} = 0,02875 \frac{\text{k}}{\text{m}}$$

Ci saranno, all'interno dell'intercapedine, anche moti convettivi che rappresentano un'ulteriore resistenza, messa però in *parallelo*.

$$\dot{Q}_{\text{conv}} = h \cdot S \cdot \Delta_T \quad (4)$$

$$\dot{Q}_{\text{irr}} = h_{\text{irr}} \cdot S \cdot \Delta_T \quad (5)$$

$$\dot{Q}_{\text{c+i}} = (h_{\text{conv}} + h_{\text{irr}}) \cdot S \cdot \Delta_T \quad (6)$$

Nei problemi a temperatura fissa, imposta, si pensano le resistenze come sopra. Se però la temperatura non è fissa, a livello fisico ricondursi alle resistenze è sbagliato, pur seguendo la legge n°10.

$$\dot{Q}_{\text{irr}} = h_{\text{irr}} \cdot S \cdot \Delta_T = h_{\text{irr}} \cdot 10 \cdot 100 = 3478 \text{W}$$

$$h_{\text{irr}} = \frac{3478}{1000} = 3,478 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{k}}$$

$$\alpha \cong 11,5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{k}}$$

Bisogna introdurre una maggiorazione del 30-40% al risultato dovuta al moto convettivo per dare una risposta esauriente e completa al problema.

Studio del caso di un corpo dentro un altro

Mentre prima è stato analizzato il caso di un'intercapedine d'aria, ora l'attenzione è spostata verso l'assorbimento termico di un corpo all'interno di un altro che lo contiene.

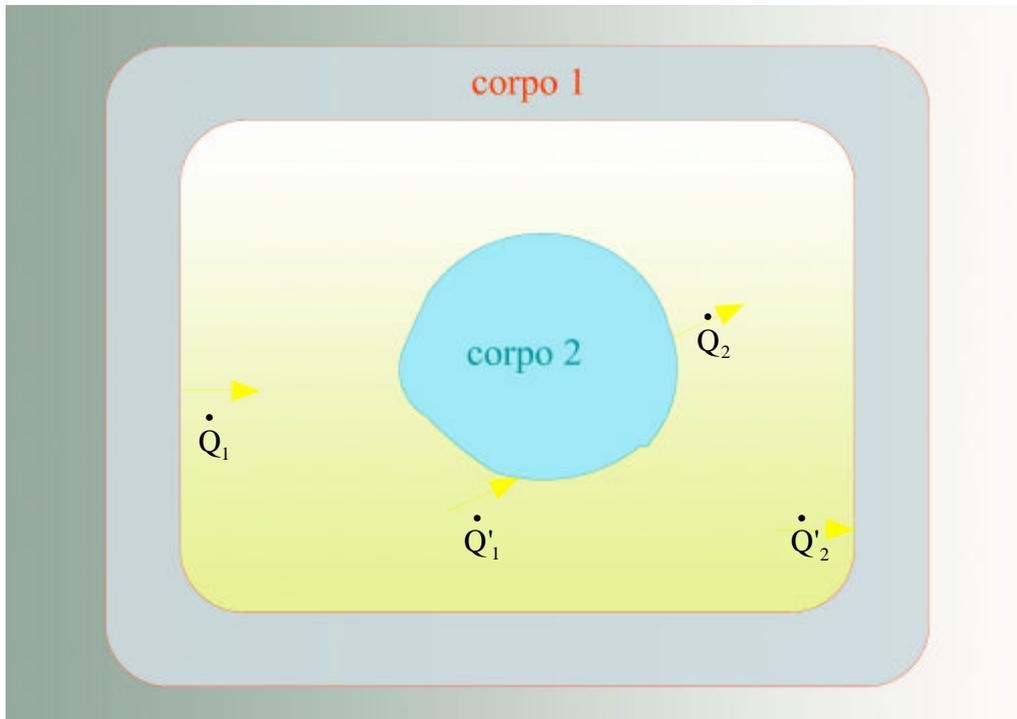


Figura 6: schematizzazione dei due corpi uno dentro l'altro.

$$\dot{Q}_1 = a_1 \cdot S_1 \cdot \sigma_0 \cdot T_1^4 \quad (7)$$

$$\dot{Q}_2 = a_2 \cdot S_2 \cdot \sigma_0 \cdot T_2^4 \quad (8)$$

Ora valutiamo le Q che piovono sui corpi

$$\begin{cases} \dot{Q}'_1 = F_{12} \cdot \left[\dot{Q}_1 + (1 - a_1) \cdot \dot{Q}'_2 \right] + F_{21} \cdot \left[\dot{Q}_2 + (1 - a_2) \cdot \dot{Q}'_1 \right] \\ \dot{Q}'_2 = F_{21} \cdot \left[\dot{Q}_2 + (1 - a_2) \cdot \dot{Q}'_1 \right] + F_{11} \cdot \left[\dot{Q}_1 + (1 - a_1) \cdot \dot{Q}'_2 \right] \end{cases} \quad (9)$$

\downarrow
 quota della potenza emessa da 1 su se stessa

$$\begin{cases} \dot{Q}'_2 = \frac{F_{21} \cdot \dot{Q}_2 [F_{11} + F_{12}(1-a_2)] \cdot \dot{Q}_1}{1 - F_{11} \cdot (1-a_1) - F_{12} \cdot (1-a_1) \cdot (1-a_2)} \\ \dot{Q}'_1 = \frac{\dot{Q}_2 + [F_{11} + F_{12} \cdot (1-a_2)] \cdot \dot{Q}_1}{1 - F_{11} \cdot (1-a_1) - F_{12} \cdot (1-a_1) \cdot (1-a_2)} \end{cases} \quad (10)$$

Applicando PREVOST su S_1 ed esprimendo tutto in funzione di F_{12}

$$\dot{Q}_s = \dot{Q}_1 - a_1 \cdot \dot{Q}'_2 = \frac{F_{12} \cdot a_2 \cdot \dot{Q}_1 - a_1 \cdot \dot{Q}_2}{a_1 + F_{12} \cdot a_2 \cdot (1-a_1)} \quad (11)$$

$$F_{12} + F_{11} = 1$$

$$F_{12} = \frac{S_2}{S_1}$$

$$\dot{Q}_s = \sigma_0 \cdot \frac{S_1 \cdot T_1^4 - S_2 \cdot T_2^4}{\frac{1}{a_2} + \frac{S_2 \cdot (1-a_1)}{S_1 \cdot a_1}} \quad (12)$$

Se però $S_2 \ll S_1$ l'equazione diventa molto più semplice e si ha:

$$\dot{Q}_s = a_2 \cdot S_2 \cdot \sigma_0 \cdot [T_1^4 - T_2^4] \quad (13)$$

Esercizio (forno rotativo)

Si calcoli la potenza scambiata tra un forno rotativo e l'ambiente che lo circonda (un capannone industriale) prima e dopo il posizionamento di un foglio di alluminio come schermo.

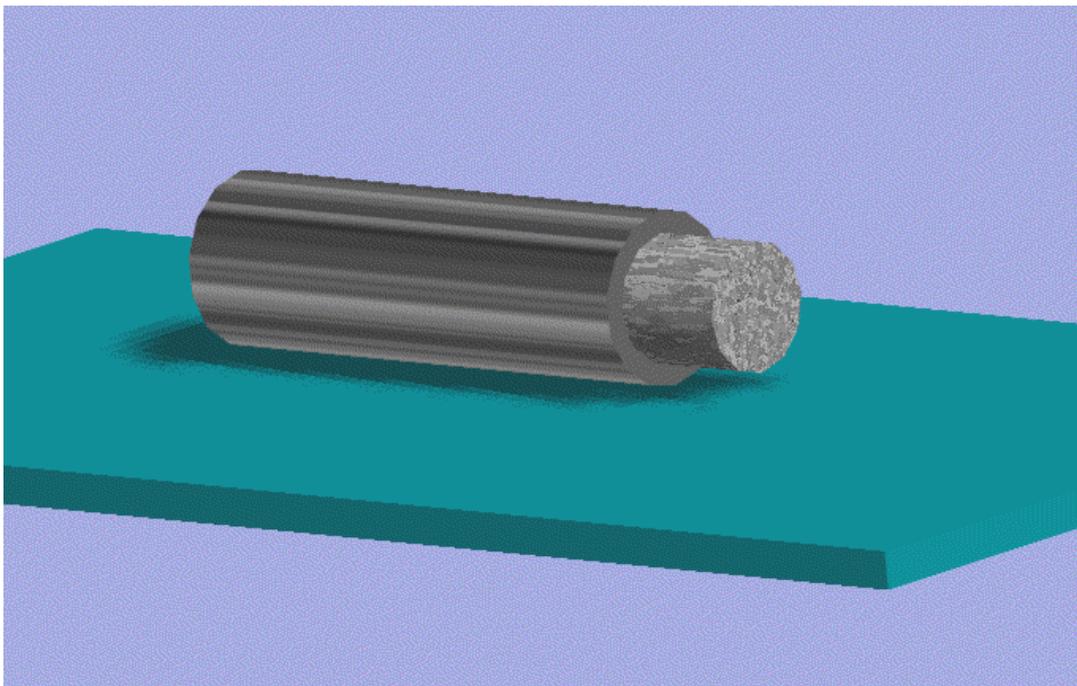


Figura 6: schematizzazione di un forno rotativo con attorno un foglio di alluminio.

$$T_F = 523\text{k (temperatura del forno)}$$

$$D_F = 1,5 \text{ m (diametro del forno)}$$

$$T_A = 300\text{k (temperatura dell'ambiente - capannone industriale)} \quad L = 2,5 \text{ m (lunghezza del forno)}$$

$$a = 0,8$$

$$\dot{Q}_{\text{irr}} = 0,8 \cdot \pi \cdot 1,5 \cdot 5 \cdot [523^4 - 300^4] \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} = 71300\text{W} \longrightarrow \text{va schermato}$$

Ora proviamo a schermare il forno con un foglio di alluminio:

$$D_S = 1,5 \cdot D_F = 2,25\text{m} \quad (\text{il diametro dello schermo è una volta e mezzo quello del forno})$$

$$a_S = 0,4$$

potenza scambiata forno-schermo

$$\dot{Q}_{\text{FS}} = \sigma_0 \cdot \pi \cdot 1,5 \cdot 5 \cdot \frac{523^4 - T_S^4}{\frac{1}{0,8} + \frac{1}{1,5} \cdot \frac{1-0,4}{0,4}}$$

$$\dot{Q}_{\text{SA}} = 0,4 \cdot \pi \cdot 2,25 \cdot 5 \cdot [T_S^4 - 300^4] \longrightarrow \text{la superficie dello schermo è molto minore rispetto a quella del capannone in cui è contenuto il forno}$$

potenza scambiata schermo-ambiente

dopo un paio di passaggi algebrici si ha:

$$T_S = \frac{523^4 \cdot \frac{1,5}{\frac{1}{0,8} + \frac{1,5}{2,25} \cdot \frac{1-0,4}{0,4}} + 300 \cdot 0,4 \cdot 2,25}{\frac{1,5}{\frac{1}{0,8} + \frac{1,5}{2,25} \cdot \frac{1-0,4}{0,4}} + 0,4 \cdot 2,25} = 3,6469 \cdot 10^{10} \text{ k}^4$$

$$T_S = \sqrt[4]{3,6469 \cdot 10^{10}} = 437\text{k}$$

$$Q_{\text{SA}} = 0,4 \cdot \pi \cdot 2,25 \cdot 5 \cdot [437^4 - 300^4] = 22740\text{W}$$

Esercizio (piastrella al sole)

Prendiamo in considerazione un altro caso, quello di una piastrella nera esposta ai raggi solari e che scambia calore con l'aria che la circonda.

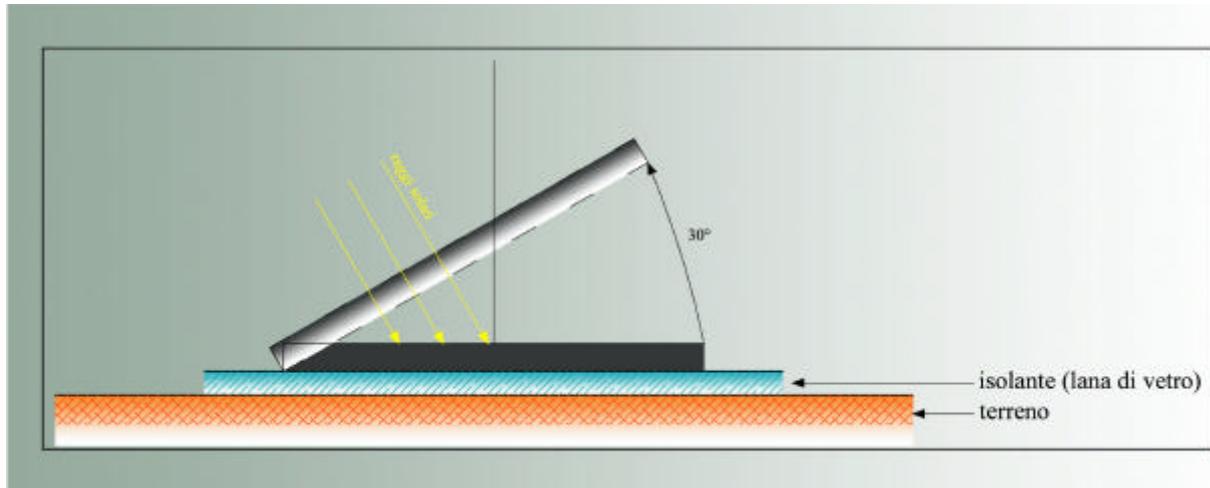


Figura 7: la piastrella vista di fianco inclinata di 30° con i raggi solari.

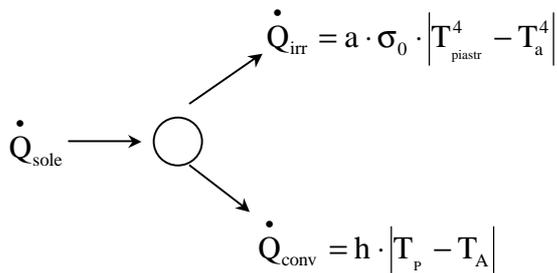
$T_A = 20^\circ\text{C}$ (temperatura dell'aria)

$$\dot{q}_{\text{sole}} = 100 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$a = 0,8$

dimensioni della piastrella : 0,5 x 0,5 m

$T_p = ?$ (temperatura della piastrella)



$$\dot{Q}_{\text{sole}} = a \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 1 \text{ m}^2}}{S_{\text{piastr}}} \cdot \cos \alpha \cdot q_{\text{sole}} = 69,3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$69,3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 0,8 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} [T_p^4 - 293^4] + h \cdot [T_p - 293]$$

h è il coefficiente di convezione che dipende dalla temperatura

$$h = \text{Nu} \cdot \frac{\lambda_{\text{aria}}}{L} = \frac{\lambda_{\text{aria}}}{L} \cdot C \cdot \text{Gr}^a \cdot \text{Pr}^b \quad (\text{Nu: numero di Nusselt} = C \cdot \text{Gr}^a \cdot \text{Pr}^b; \text{ il numero di Prandtl è } 0,71)$$

Utilizzando come temperatura $T_p^* = 40^\circ\text{C}$ si ottiene un numero di Grashof

$$\text{Gr} = \frac{g \cdot \beta \cdot L^\xi \cdot (T_p - T_a)}{\nu^2} = \frac{9,81 \cdot \frac{1}{303} \cdot 0,5^3 \cdot (40 - 20)}{(15,67 \cdot 10^{-6})^2} = 340881477$$

Inserendo questo numero nella formula di h si ha:

$$h = \text{Nu} \cdot \frac{\lambda_{\text{aria}}}{L} = \frac{\lambda_{\text{aria}}}{L} \cdot C \cdot \text{Gr}^a \cdot \text{Pr}^b = \frac{0,003}{0,5} \cdot 0,14 \cdot 340881477^{0,3} \cdot 0,71^{0,3} = 2,75 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

Con questo numero di Grashof si usa la relazione di *Fischenden-Saunders* poiché il prodotto $\text{Gr} \cdot \text{Pr} < 10^9$. Si può ora calcolare la temperatura sulla piastrina:

$$T_p = \sqrt[4]{293^4 + \frac{69,3 - 2,3 \cdot (40 - 20)}{0,8 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8}}} = 23^\circ\text{C}$$

Il valore trovato è molto lontano da quello supposto. Usiamo la tecnica della bisezione e prendiamo un valore medio tra 40°C e 23°C : 31°C .

$$\text{Gr} = \frac{g \cdot \beta \cdot L^\xi \cdot (T_p - T_a)}{\nu^2} = \frac{9,81 \cdot \frac{1}{278} \cdot 0,5^3 \cdot (31 - 20)}{(15,67 \cdot 10^{-6})^2} = 187484812$$

$$h_c = \frac{0,03}{0,5} \cdot 0,14 \cdot 187484812^{0,3} \cdot 0,71^{0,3} = 2,3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{k}}$$

$$T_p = \sqrt[4]{293^4 + \frac{69,3 - 2,3 \cdot (31 - 20)}{0,8 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8}}} = 29,2^\circ\text{C} \quad \longrightarrow \quad \text{bisognerebbe provare con } 30^\circ\text{C, che è in mezzo tra } 29^\circ \text{ e } 31^\circ$$

$$T_p = \frac{31 + 29,2}{2} = 30,1^\circ\text{C}$$

Un'equazione di quarto grado può avere quattro soluzioni: tre sono artefatti matematici mentre solo una è fisicamente accettabile; inoltre ha due soluzioni stabili e due instabili e bisogna scegliere le due stabili